Wiskunde logica

Werkcollege 5

Jolien Oomens

10 maart 2017

Opgave 1

(a) De structuur $(A, \sigma^A, 0^A)$ voldoet aan de axioma's van Peano.
(b) $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ is bepaald door Π tot op isomorfismen.

Zij $\mathfrak{A} = (A, +^A, \cdot^A, 0^A, 1^A)$ een model van Π. De eerste drie formules uit Π geven precies (P1), (P2) en (P3) respectievelijk. We willen aantonen dat er een isomorfisme $\pi\colon \mathfrak{N} \cong \mathfrak{A}$ bestaat. We definiëren π inductief:

- $\pi(0) = 0^A$
- $\pi(n+1) = \sigma^A(\pi(n))$

We weten al dat dit een isomorfisme is voor de opvolgfunctie (Dedekinds stelling; blz. 50), maar we moeten nog controleren dat het ook $+$ en $\cdot$ behoudt.

We definiëren $\pi\colon \mathfrak{N} \to \mathfrak{A}$ door $\pi(0) = 0^A$ en $\pi(n+1) = \sigma^A(\pi(n))$.

Claim

Er geldt $\pi(n \cdot m) = \pi(n) \cdot^A \pi(m)$ voor alle $m, n \in \mathbb{N}$.

We bewijzen dit met inductie naar m.

- Als $m = 0$ dan hebben we $\pi(n \cdot 0) = \pi(0) = 0^A = \pi(n) \cdot^A \pi(0)$. We gebruiken hier de zesde formule [Π6].
- Stel dat het klopt voor een zekere m. Voor $m+1$ geldt dan

$$\begin{aligned}\pi(n \cdot (m+1)) &= \pi(nm + n) = \pi(nm) +^A \pi(n)\\ &\overset{\text{IH}}{=} \pi(n) \cdot^A \pi(m) +^A \pi(n) \overset{[\Pi 7]}{=} \pi(n) \cdot^A (\pi(m) +^A 1^A)\\ &= \pi(n) \cdot^A \sigma^A(\pi(m)) = \pi(n) \cdot^A \pi(m+1).\end{aligned}$$

Dit bewijst dat π een isomorfisme is ten opzichte van $\cdot$.
Bewijs nu hetzelfde voor $+$.

Opgave 3

Laat zien dat de regel $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma, \varphi \vdash \forall x \psi}$ incorrect is.

Neem $\Gamma = \varnothing$ en $\varphi = \psi = Rxx$. Dan is een model met twee punten waarvan er maar 1 reflexief is een tegenvoorbeeld.

Als we aannemen dat $x \notin \mathrm{var}\,\psi$ dan is de regel duidelijk correct.

Opgave 5

(a) Laat zien dat $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \neg\neg\varphi}$ en (b) dat $\dfrac{\Gamma \vdash \neg\neg\varphi}{\Gamma \vdash \varphi}$.

(a) Een mogelijk bewijs is

$\Gamma \vdash \varphi$	(Premisse)
$\Gamma \vdash \neg\varphi \vee \neg\neg\varphi$	(Tertium non datur)
$\Gamma \vdash \neg\neg\varphi$	(Modus ponens).

(b) Een mogelijk bewijs is

$\Gamma \vdash \neg\neg\varphi$	(Premisse)
$\Gamma, \neg\varphi \vdash \neg\neg\varphi$	(Antecedent)
$\Gamma, \neg\varphi \vdash \neg\varphi$	(Aanname)
$\Gamma \vdash \varphi$	(Contradictie).

Opgave 5(c)

Laat zien dat $\dfrac{\varphi \vdash \psi}{\exists x\varphi \vdash \exists x\psi}$.

Een mogelijk bewijs is

$\varphi \vdash \psi$	(Premisse)
$\varphi \vdash \exists x\psi$	($\exists$S)
$\exists x\varphi \vdash \exists x\psi$	($\exists$A),

waar we bij ($\exists$A) gebruikten dat x niet vrij is in $\exists x\varphi$ en $\exists x\psi$.

Opgave 5(d)

Laat zien dat $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \to \psi, \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}$.

Herinner je dat $\varphi \to \psi := \neg\varphi \vee \psi$. We hebben

$\Gamma \vdash \neg\varphi \vee \psi$	(Premisse)
$\Gamma \vdash \varphi$	(Premisse)
$\Gamma, \psi \vdash \psi$	(Aanname)
$\Gamma, \neg\varphi \vdash \neg\varphi$	(Aanname)
$\Gamma, \neg\varphi \vdash \varphi$	(Antecedent)
$\Gamma, \neg\varphi \vdash \psi$	(Contradictie')
$\Gamma, (\neg\varphi \vee \psi) \vdash \psi$	($\vee$A)
$\Gamma \vdash \psi$	(Kettingregel).

Opgave 5(e)

Laat zien dat $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi\frac{y}{x}}{\Gamma \vdash \forall x\varphi}$ als y niet vrij is in Γ en in $\forall x\varphi$.

Herinner je dat $\forall x\varphi := \neg\exists x\neg\varphi$. Een bewijs is

$\Gamma \vdash \varphi\frac{y}{x}$	(Premisse)
$\Gamma, \neg\varphi\frac{y}{x} \vdash \neg\varphi\frac{y}{x}$	(Aanname)
$\Gamma, \exists x\neg\varphi \vdash \neg\varphi\frac{y}{x}$	($\exists$A)
$\Gamma, \varphi\frac{y}{x} \vdash \neg\exists x\neg\varphi$	(Contrapositie D)
$\Gamma \vdash \neg\exists x\neg\varphi$	(Kettingregel).

Controleer zelf dat we inderdaad de regel ($\exists$A) mochten toepassen.