Analyse: van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}^n$ hoorcollege

Metrische ruimten (10)

Gerrit Oomens
G.Oomens@uva.nl

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica
Universiteit van Amsterdam

Afstandsbegrip

Metriek

Zij S een verzameling en $d\colon S \times S \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ een functie die voldoet aan

1. $d(x,x) = 0$ voor alle $x \in S$ en $d(x,y) > 0$ als $x \neq y$ in S.
2. $d(x,y) = d(y,x)$ voor alle $x, y \in S$.
3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ voor alle $x, y, z \in S$ (driehoeksongelijkheid).

Dan noemen we d een metriek op S.

Afstandsbegrip

Metriek

Zij S een verzameling en $d\colon S \times S \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ een functie die voldoet aan

1. $d(x,x) = 0$ voor alle $x \in S$ en $d(x,y) > 0$ als $x \neq y$ in S.
2. $d(x,y) = d(y,x)$ voor alle $x, y \in S$.
3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ voor alle $x, y, z \in S$ (driehoeksongelijkheid).

Dan noemen we d een metriek op S. De combinatie (S,d) noemen we een metrische ruimte.

Afstandsbegrip

Metriek

Zij S een verzameling en $d\colon S \times S \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ een functie die voldoet aan

1. $d(x,x) = 0$ voor alle $x \in S$ en $d(x,y) > 0$ als $x \neq y$ in S.
2. $d(x,y) = d(y,x)$ voor alle $x, y \in S$.
3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ voor alle $x, y, z \in S$ (driehoeksongelijkheid).

Dan noemen we d een metriek op S. De combinatie (S, d) noemen we een metrische ruimte.

Tot nu toe hebben we altijd gewerkt met $S = \mathbb{R}$ en $d(x,y) = |x - y|$.

Afstandsbegrip

Metriek

Zij S een verzameling en $d\colon S \times S \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ een functie die voldoet aan

1. $d(x,x) = 0$ voor alle $x \in S$ en $d(x,y) > 0$ als $x \neq y$ in S.
2. $d(x,y) = d(y,x)$ voor alle $x, y \in S$.
3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ voor alle $x, y, z \in S$ (driehoeksongelijkheid).

Dan noemen we d een metriek op S. De combinatie (S, d) noemen we een metrische ruimte.

Tot nu toe hebben we altijd gewerkt met $S = \mathbb{R}$ en $d(x,y) = |x - y|$. We kunnen echter ook $S = \mathbb{R}^2$ bekijken

Afstandsbegrip

Metriek

Zij S een verzameling en $d\colon S \times S \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ een functie die voldoet aan

1. $d(x,x) = 0$ voor alle $x \in S$ en $d(x,y) > 0$ als $x \neq y$ in S.
2. $d(x,y) = d(y,x)$ voor alle $x, y \in S$.
3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ voor alle $x, y, z \in S$ (driehoeksongelijkheid).

Dan noemen we d een metriek op S. De combinatie (S, d) noemen we een metrische ruimte.

Tot nu toe hebben we altijd gewerkt met $S = \mathbb{R}$ en $d(x,y) = |x - y|$. We kunnen echter ook $S = \mathbb{R}^2$ bekijken waar we voor $\vec{\mathbf{x}} = (x_1, x_2)$ en $\vec{\mathbf{y}} = (y_1, y_2)$ definiëren

$$d(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}})$$

Afstandsbegrip

Metriek

Zij S een verzameling en $d\colon S \times S \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ een functie die voldoet aan

1. $d(x,x) = 0$ voor alle $x \in S$ en $d(x,y) > 0$ als $x \neq y$ in S.
2. $d(x,y) = d(y,x)$ voor alle $x, y \in S$.
3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ voor alle $x, y, z \in S$ (driehoeksongelijkheid).

Dan noemen we d een metriek op S. De combinatie (S, d) noemen we een metrische ruimte.

Tot nu toe hebben we altijd gewerkt met $S = \mathbb{R}$ en $d(x,y) = |x - y|$. We kunnen echter ook $S = \mathbb{R}^2$ bekijken waar we voor $\vec{\mathbf{x}} = (x_1, x_2)$ en $\vec{\mathbf{y}} = (y_1, y_2)$ definiëren

$$d(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2},$$

Afstandsbegrip

Metriek

Zij S een verzameling en $d\colon S \times S \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ een functie die voldoet aan

1. $d(x, x) = 0$ voor alle $x \in S$ en $d(x, y) > 0$ als $x \neq y$ in S.
2. $d(x, y) = d(y, x)$ voor alle $x, y \in S$.
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ voor alle $x, y, z \in S$ (driehoeksongelijkheid).

Dan noemen we d een metriek op S. De combinatie (S, d) noemen we een metrische ruimte.

Tot nu toe hebben we altijd gewerkt met $S = \mathbb{R}$ en $d(x, y) = |x - y|$. We kunnen echter ook $S = \mathbb{R}^2$ bekijken waar we voor $\vec{\mathbf{x}} = (x_1, x_2)$ en $\vec{\mathbf{y}} = (y_1, y_2)$ definiëren

$$d(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2},$$

de Euclidische metriek

Afstandsbegrip

Metriek

Zij S een verzameling en $d\colon S \times S \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ een functie die voldoet aan

1. $d(x,x) = 0$ voor alle $x \in S$ en $d(x,y) > 0$ als $x \neq y$ in S.
2. $d(x,y) = d(y,x)$ voor alle $x, y \in S$.
3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ voor alle $x, y, z \in S$ (driehoeksongelijkheid).

Dan noemen we d een metriek op S. De combinatie (S,d) noemen we een metrische ruimte.

Tot nu toe hebben we altijd gewerkt met $S = \mathbb{R}$ en $d(x,y) = |x-y|$. We kunnen echter ook $S = \mathbb{R}^2$ bekijken waar we voor $\vec{\mathbf{x}} = (x_1, x_2)$ en $\vec{\mathbf{y}} = (y_1, y_2)$ definiëren

$$d(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2},$$

de Euclidische metriek: afstand in het vlak.

Afstandsbegrip

Metriek

Zij S een verzameling en $d\colon S \times S \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ een functie die voldoet aan

1. $d(x,x) = 0$ voor alle $x \in S$ en $d(x,y) > 0$ als $x \neq y$ in S.
2. $d(x,y) = d(y,x)$ voor alle $x, y \in S$.
3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ voor alle $x, y, z \in S$ (driehoeksongelijkheid).

Dan noemen we d een metriek op S. De combinatie (S,d) noemen we een metrische ruimte.

Tot nu toe hebben we altijd gewerkt met $S = \mathbb{R}$ en $d(x,y) = |x - y|$. We kunnen echter ook $S = \mathbb{R}^2$ bekijken waar we voor $\vec{\mathbf{x}} = (x_1, x_2)$ en $\vec{\mathbf{y}} = (y_1, y_2)$ definiëren

$$d(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2},$$

de Euclidische metriek: afstand in het vlak. Merk op dat $d(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{y}}\|$

Afstandsbegrip

Metriek

Zij S een verzameling en $d\colon S \times S \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ een functie die voldoet aan

1. $d(x,x) = 0$ voor alle $x \in S$ en $d(x,y) > 0$ als $x \neq y$ in S.
2. $d(x,y) = d(y,x)$ voor alle $x, y \in S$.
3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ voor alle $x, y, z \in S$ (driehoeksongelijkheid).

Dan noemen we d een metriek op S. De combinatie (S,d) noemen we een metrische ruimte.

Tot nu toe hebben we altijd gewerkt met $S = \mathbb{R}$ en $d(x,y) = |x - y|$. We kunnen echter ook $S = \mathbb{R}^2$ bekijken waar we voor $\vec{\mathbf{x}} = (x_1, x_2)$ en $\vec{\mathbf{y}} = (y_1, y_2)$ definiëren

$$d(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2},$$

de Euclidische metriek: afstand in het vlak. Merk op dat $d(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{y}}\|$, waar $\|\cdot\|$ de Euclidische norm op $\mathbb{R}^2$ is.

Afstandsbegrip

Metriek

Zij S een verzameling en $d\colon S \times S \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ een functie die voldoet aan

1. $d(x,x) = 0$ voor alle $x \in S$ en $d(x,y) > 0$ als $x \neq y$ in S.
2. $d(x,y) = d(y,x)$ voor alle $x, y \in S$.
3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ voor alle $x, y, z \in S$ (driehoeksongelijkheid).

Dan noemen we d een metriek op S. De combinatie (S, d) noemen we een metrische ruimte.

Tot nu toe hebben we altijd gewerkt met $S = \mathbb{R}$ en $d(x,y) = |x - y|$. We kunnen echter ook $S = \mathbb{R}^2$ bekijken waar we voor $\vec{\mathbf{x}} = (x_1, x_2)$ en $\vec{\mathbf{y}} = (y_1, y_2)$ definiëren

$$d(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2},$$

de Euclidische metriek: afstand in het vlak. Merk op dat $d(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{y}}\|$, waar $\|\cdot\|$ de Euclidische norm op $\mathbb{R}^2$ is. Meer algemeen kunnen we op $\mathbb{R}^k$ definiëren

$$d(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}})$$

Afstandsbegrip

Metriek

Zij S een verzameling en $d\colon S \times S \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ een functie die voldoet aan

1. $d(x, x) = 0$ voor alle $x \in S$ en $d(x, y) > 0$ als $x \neq y$ in S.
2. $d(x, y) = d(y, x)$ voor alle $x, y \in S$.
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ voor alle $x, y, z \in S$ (driehoeksongelijkheid).

Dan noemen we d een metriek op S. De combinatie (S, d) noemen we een metrische ruimte.

Tot nu toe hebben we altijd gewerkt met $S = \mathbb{R}$ en $d(x, y) = |x - y|$. We kunnen echter ook $S = \mathbb{R}^2$ bekijken waar we voor $\vec{\mathbf{x}} = (x_1, x_2)$ en $\vec{\mathbf{y}} = (y_1, y_2)$ definiëren

$$d(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2},$$

de Euclidische metriek: afstand in het vlak. Merk op dat $d(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{y}}\|$, waar $\|\cdot\|$ de Euclidische norm op $\mathbb{R}^2$ is. Meer algemeen kunnen we op $\mathbb{R}^k$ definiëren

$$d(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} (x_j - y_j)^2}.$$

Voorbeelden van metrieken op $\mathbb{R}^n$

Metriek

Zij S een verzameling en $d\colon S \times S \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ een functie die voldoet aan

1. $d(x,x) = 0$ voor alle $x \in S$ en $d(x,y) > 0$ als $x \neq y$ in S.
2. $d(x,y) = d(y,x)$ voor alle $x, y \in S$.
3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ voor alle $x, y, z \in S$ (driehoeksongelijkheid).

Dan noemen we d een metriek op S. De combinatie (S,d) noemen we een metrische ruimte.

Bekijk $S = \mathbb{R}^k$. Voor de hand liggende metrieken:

$$d_2(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} (x_j - y_j)^2}$$

Voorbeelden van metrieken op $\mathbb{R}^n$

Metriek

Zij S een verzameling en $d\colon S \times S \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ een functie die voldoet aan

1. $d(x,x) = 0$ voor alle $x \in S$ en $d(x,y) > 0$ als $x \neq y$ in S.
2. $d(x,y) = d(y,x)$ voor alle $x, y \in S$.
3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ voor alle $x, y, z \in S$ (driehoeksongelijkheid).

Dan noemen we d een metriek op S. De combinatie (S, d) noemen we een metrische ruimte.

Bekijk $S = \mathbb{R}^k$. Voor de hand liggende metrieken:

$$d_2(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} (x_j - y_j)^2}, \quad d_1(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \sum_{j=1}^{k} |x_j - y_j|$$

Voorbeelden van metrieken op $\mathbb{R}^n$

Metriek

Zij S een verzameling en $d\colon S \times S \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ een functie die voldoet aan

1. $d(x,x) = 0$ voor alle $x \in S$ en $d(x,y) > 0$ als $x \neq y$ in S.
2. $d(x,y) = d(y,x)$ voor alle $x, y \in S$.
3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ voor alle $x, y, z \in S$ (driehoeksongelijkheid).

Dan noemen we d een metriek op S. De combinatie (S,d) noemen we een metrische ruimte.

Bekijk $S = \mathbb{R}^k$. Voor de hand liggende metrieken:

$$d_2(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} (x_j - y_j)^2}, \quad d_1(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \sum_{j=1}^{k} |x_j - y_j|, \quad d_\infty(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \max_{1 \leq j \leq k} |x_j - y_j|.$$

Voorbeelden van metrieken op $\mathbb{R}^n$

Metriek

Zij S een verzameling en $d\colon S \times S \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ een functie die voldoet aan

1. $d(x,x) = 0$ voor alle $x \in S$ en $d(x,y) > 0$ als $x \neq y$ in S.
2. $d(x,y) = d(y,x)$ voor alle $x, y \in S$.
3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ voor alle $x, y, z \in S$ (driehoeksongelijkheid).

Dan noemen we d een metriek op S. De combinatie (S,d) noemen we een metrische ruimte.

Bekijk $S = \mathbb{R}^k$. Voor de hand liggende metrieken:

$$d_2(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} (x_j - y_j)^2}, \quad d_1(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \sum_{j=1}^{k} |x_j - y_j|, \quad d_\infty(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \max_{1 \leq j \leq k} |x_j - y_j|.$$

Een veel flauwere metriek is de discrete metriek:

$$d(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}})$$

Voorbeelden van metrieken op $\mathbb{R}^n$

Metriek

Zij S een verzameling en $d\colon S \times S \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ een functie die voldoet aan

1. $d(x,x) = 0$ voor alle $x \in S$ en $d(x,y) > 0$ als $x \neq y$ in S.
2. $d(x,y) = d(y,x)$ voor alle $x, y \in S$.
3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ voor alle $x, y, z \in S$ (driehoeksongelijkheid).

Dan noemen we d een metriek op S. De combinatie (S,d) noemen we een metrische ruimte.

Bekijk $S = \mathbb{R}^k$. Voor de hand liggende metrieken:

$$d_2(\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{y}}) = \sqrt{\sum_{j=1}^{k}(x_j - y_j)^2}, \quad d_1(\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{y}}) = \sum_{j=1}^{k}|x_j - y_j|, \quad d_\infty(\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{y}}) = \max_{1\leq j\leq k}|x_j - y_j|.$$

Een veel flauwere metriek is de discrete metriek:

$$d(\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{y}}) = \begin{cases} 1 & \text{als } \vec{\mathbf{x}} \neq \vec{\mathbf{y}} \\ 0 & \text{als } \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{y}}. \end{cases}$$

Metrieken en convergentie: terminologie

Zij (S, d) een metrische ruimte en (s_n) een rij in S.

Metrieken en convergentie: terminologie

Zij (S, d) een metrische ruimte en (s_n) een rij in S.

- We zeggen dat (s_n) convergeert naar $s \in S$ als $\lim_{n\to\infty} d(s_n, s) = 0$.

Metrieken en convergentie: terminologie

Zij (S, d) een metrische ruimte en (s_n) een rij in S.

- We zeggen dat (s_n) convergeert naar $s \in S$ als $\lim_{n\to\infty} d(s_n, s) = 0$. Oftewel:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad d(s_n, s) < \epsilon \quad \text{als} \quad n > N.$$

Metrieken en convergentie: terminologie

Zij (S, d) een metrische ruimte en (s_n) een rij in S.

- We zeggen dat (s_n) convergeert naar $s \in S$ als $\lim_{n\to\infty} d(s_n, s) = 0$. Oftewel:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad d(s_n, s) < \epsilon \quad \text{als} \quad n > N.$$

- Evenzo zeggen we dat (s_n) Cauchy is als

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad d(s_n, s_m) < \epsilon \quad \text{als} \quad n, m > N.$$

Metrieken en convergentie: terminologie

Zij (S, d) een metrische ruimte en (s_n) een rij in S.

- We zeggen dat (s_n) convergeert naar $s \in S$ als $\lim_{n\to\infty} d(s_n, s) = 0$. Oftewel:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad d(s_n, s) < \epsilon \quad \text{als} \quad n > N.$$

- Evenzo zeggen we dat (s_n) Cauchy is als

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad d(s_n, s_m) < \epsilon \quad \text{als} \quad n, m > N.$$

- We noemen (S, d) volledig (Engels: complete) als elke Cauchyrij in S convergeert naar een element van S.

Metrieken en convergentie: terminologie

Zij (S, d) een metrische ruimte en (s_n) een rij in S.

- We zeggen dat (s_n) convergeert naar $s \in S$ als $\lim_{n\to\infty} d(s_n, s) = 0$. Oftewel:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad d(s_n, s) < \epsilon \quad \text{als} \quad n > N.$$

- Evenzo zeggen we dat (s_n) Cauchy is als

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad d(s_n, s_m) < \epsilon \quad \text{als} \quad n, m > N.$$

- We noemen (S, d) volledig (Engels: complete) als elke Cauchyrij in S convergeert naar een element van S.

Bekend: $\mathbb{R}$ met $d(x, y) = |x - y|$ is volledig.

Metrieken en convergentie: terminologie

Zij (S, d) een metrische ruimte en (s_n) een rij in S.

- We zeggen dat (s_n) convergeert naar $s \in S$ als $\lim_{n\to\infty} d(s_n, s) = 0$. Oftewel:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad d(s_n, s) < \epsilon \quad \text{als} \quad n > N.$$

- Evenzo zeggen we dat (s_n) Cauchy is als

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad d(s_n, s_m) < \epsilon \quad \text{als} \quad n, m > N.$$

- We noemen (S, d) volledig (Engels: complete) als elke Cauchyrij in S convergeert naar een element van S.

Bekend: $\mathbb{R}$ met $d(x, y) = |x - y|$ is volledig. De rationale getallen $\mathbb{Q}$ met dezelfde metriek zijn echter niet volledig.

Metrieken en convergentie: terminologie

Zij (S, d) een metrische ruimte en (s_n) een rij in S.

- We zeggen dat (s_n) convergeert naar $s \in S$ als $\lim_{n\to\infty} d(s_n, s) = 0$. Oftewel:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad d(s_n, s) < \epsilon \quad \text{als} \quad n > N.$$

- Evenzo zeggen we dat (s_n) Cauchy is als

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad d(s_n, s_m) < \epsilon \quad \text{als} \quad n, m > N.$$

- We noemen (S, d) volledig (Engels: complete) als elke Cauchyrij in S convergeert naar een element van S.

Bekend: $\mathbb{R}$ met $d(x, y) = |x - y|$ is volledig. De rationale getallen $\mathbb{Q}$ met dezelfde metriek zijn echter niet volledig.

Claim: $\mathbb{R}^k$ is volledig met de Euclidische metriek.

Volledigheid van $\mathbb{R}^k$

We bekijken $\mathbb{R}^k$ met de Euclidische metriek $d(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \sqrt{\sum_{j=1}^k (x_j - y_j)^2}$.

Volledigheid van $\mathbb{R}^k$

We bekijken $\mathbb{R}^k$ met de Euclidische metriek $d(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \sqrt{\sum_{j=1}^k (x_j - y_j)^2}$.

Lemma 13.3

Een rij $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ in $\mathbb{R}^k$ convergeert desda voor elke $j \in \{1, \ldots, k\}$ de rij $\left(x_j^{(n)}\right)$ convergeert.

Een rij $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ in $\mathbb{R}^k$ is Cauchy desda voor elke $j \in \{1, \ldots, k\}$ de rij $\left(x_j^{(n)}\right)$ Cauchy is.

We bewijzen de tweede bewering.

Volledigheid van $\mathbb{R}^k$

We bekijken $\mathbb{R}^k$ met de Euclidische metriek $d(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \sqrt{\sum_{j=1}^{k}(x_j - y_j)^2}$.

Lemma 13.3

Een rij $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ in $\mathbb{R}^k$ convergeert desda voor elke $j \in \{1, \ldots, k\}$ de rij $\left(x_j^{(n)}\right)$ convergeert.

Een rij $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ in $\mathbb{R}^k$ is Cauchy desda voor elke $j \in \{1, \ldots, k\}$ de rij $\left(x_j^{(n)}\right)$ Cauchy is.

We bewijzen de tweede bewering. Merk op dat voor elke j geldt

$$|x_j - y_j| \leq d(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}})$$

Volledigheid van $\mathbb{R}^k$

We bekijken $\mathbb{R}^k$ met de Euclidische metriek $d(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \sqrt{\sum_{j=1}^k (x_j - y_j)^2}$.

Lemma 13.3

Een rij $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ in $\mathbb{R}^k$ convergeert desda voor elke $j \in \{1, \ldots, k\}$ de rij $\left(x_j^{(n)}\right)$ convergeert.
Een rij $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ in $\mathbb{R}^k$ is Cauchy desda voor elke $j \in \{1, \ldots, k\}$ de rij $\left(x_j^{(n)}\right)$ Cauchy is.

We bewijzen de tweede bewering. Merk op dat voor elke j geldt

$$|x_j - y_j| \leq d(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) \leq \sqrt{k} \max_{1 \leq j \leq k} |x_j - y_j|.$$

Volledigheid van $\mathbb{R}^k$

We bekijken $\mathbb{R}^k$ met de Euclidische metriek $d(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \sqrt{\sum_{j=1}^k (x_j - y_j)^2}$.

Lemma 13.3

Een rij $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ in $\mathbb{R}^k$ convergeert desda voor elke $j \in \{1, \ldots, k\}$ de rij $\left(x_j^{(n)}\right)$ convergeert.

Een rij $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ in $\mathbb{R}^k$ is Cauchy desda voor elke $j \in \{1, \ldots, k\}$ de rij $\left(x_j^{(n)}\right)$ Cauchy is.

We bewijzen de tweede bewering. Merk op dat voor elke j geldt

$$|x_j - y_j| \leq d(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) \leq \sqrt{k} \max_{1 \leq j \leq k} |x_j - y_j|.$$

1. Stel dat $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ Cauchy is in $\mathbb{R}^k$.

Volledigheid van $\mathbb{R}^k$

We bekijken $\mathbb{R}^k$ met de Euclidische metriek $d(\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{y}}) = \sqrt{\sum_{j=1}^k (x_j - y_j)^2}$.

Lemma 13.3

Een rij $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ in $\mathbb{R}^k$ convergeert desda voor elke $j \in \{1,\ldots,k\}$ de rij $\left(x_j^{(n)}\right)$ convergeert.
Een rij $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ in $\mathbb{R}^k$ is Cauchy desda voor elke $j \in \{1,\ldots,k\}$ de rij $\left(x_j^{(n)}\right)$ Cauchy is.

We bewijzen de tweede bewering. Merk op dat voor elke j geldt

$$|x_j - y_j| \leq d(\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{y}}) \leq \sqrt{k} \max_{1\leq j\leq k} |x_j - y_j|.$$

1. Stel dat $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ Cauchy is in $\mathbb{R}^k$. Als $d\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)},\vec{\mathbf{x}}^{(m)}\right) < \epsilon$

Volledigheid van $\mathbb{R}^k$

We bekijken $\mathbb{R}^k$ met de Euclidische metriek $d(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} (x_j - y_j)^2}$.

Lemma 13.3

Een rij $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ in $\mathbb{R}^k$ convergeert desda voor elke $j \in \{1, \ldots, k\}$ de rij $\left(x_j^{(n)}\right)$ convergeert.
Een rij $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ in $\mathbb{R}^k$ is Cauchy desda voor elke $j \in \{1, \ldots, k\}$ de rij $\left(x_j^{(n)}\right)$ Cauchy is.

We bewijzen de tweede bewering. Merk op dat voor elke j geldt

$$|x_j - y_j| \leq d(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) \leq \sqrt{k} \max_{1 \leq j \leq k} |x_j - y_j|.$$

1. Stel dat $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ Cauchy is in $\mathbb{R}^k$. Als $d\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}, \vec{\mathbf{x}}^{(m)}\right) < \epsilon$, dan geldt ook voor elke j dat $|x_j^{(n)} - x_j^{(m)}| < \epsilon$.

Volledigheid van $\mathbb{R}^k$

We bekijken $\mathbb{R}^k$ met de Euclidische metriek $d(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \sqrt{\sum_{j=1}^k (x_j - y_j)^2}$.

Lemma 13.3

Een rij $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ in $\mathbb{R}^k$ convergeert desda voor elke $j \in \{1, \ldots, k\}$ de rij $\left(x_j^{(n)}\right)$ convergeert.

Een rij $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ in $\mathbb{R}^k$ is Cauchy desda voor elke $j \in \{1, \ldots, k\}$ de rij $\left(x_j^{(n)}\right)$ Cauchy is.

We bewijzen de tweede bewering. Merk op dat voor elke j geldt

$$|x_j - y_j| \leq d(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) \leq \sqrt{k} \max_{1 \leq j \leq k} |x_j - y_j|.$$

1. Stel dat $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ Cauchy is in $\mathbb{R}^k$. Als $d\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}, \vec{\mathbf{x}}^{(m)}\right) < \epsilon$, dan geldt ook voor elke j dat $|x_j^{(n)} - x_j^{(m)}| < \epsilon$. Dus de rij $\left(x_j^{(n)}\right)$ is voor elke j Cauchy in $\mathbb{R}$.

Volledigheid van $\mathbb{R}^k$

We bekijken $\mathbb{R}^k$ met de Euclidische metriek $d(\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{y}}) = \sqrt{\sum_{j=1}^k (x_j - y_j)^2}$.

Lemma 13.3

Een rij $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ in $\mathbb{R}^k$ convergeert desda voor elke $j \in \{1,\ldots,k\}$ de rij $\left(x_j^{(n)}\right)$ convergeert.
Een rij $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ in $\mathbb{R}^k$ is Cauchy desda voor elke $j \in \{1,\ldots,k\}$ de rij $\left(x_j^{(n)}\right)$ Cauchy is.

We bewijzen de tweede bewering. Merk op dat voor elke j geldt

$$|x_j - y_j| \leq d(\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{y}}) \leq \sqrt{k} \max_{1\leq j\leq k} |x_j - y_j|.$$

1. Stel dat $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ Cauchy is in $\mathbb{R}^k$. Als $d\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)},\vec{\mathbf{x}}^{(m)}\right) < \epsilon$, dan geldt ook voor elke j dat $|x_j^{(n)} - x_j^{(m)}| < \epsilon$. Dus de rij $\left(x_j^{(n)}\right)$ is voor elke j Cauchy in $\mathbb{R}$.
2. Stel nu dat $\left(x_j^{(n)}\right)$ Cauchy is voor elke j

Volledigheid van $\mathbb{R}^k$

We bekijken $\mathbb{R}^k$ met de Euclidische metriek $d(\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{y}}) = \sqrt{\sum_{j=1}^k (x_j - y_j)^2}$.

Lemma 13.3

Een rij $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ in $\mathbb{R}^k$ convergeert desda voor elke $j \in \{1,\ldots,k\}$ de rij $\left(x_j^{(n)}\right)$ convergeert.

Een rij $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ in $\mathbb{R}^k$ is Cauchy desda voor elke $j \in \{1,\ldots,k\}$ de rij $\left(x_j^{(n)}\right)$ Cauchy is.

We bewijzen de tweede bewering. Merk op dat voor elke j geldt

$$|x_j - y_j| \leq d(\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{y}}) \leq \sqrt{k} \max_{1\leq j\leq k} |x_j - y_j|.$$

1. Stel dat $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ Cauchy is in $\mathbb{R}^k$. Als $d\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)},\vec{\mathbf{x}}^{(m)}\right) < \epsilon$, dan geldt ook voor elke j dat $|x_j^{(n)} - x_j^{(m)}| < \epsilon$. Dus de rij $\left(x_j^{(n)}\right)$ is voor elke j Cauchy in $\mathbb{R}$.
2. Stel nu dat $\left(x_j^{(n)}\right)$ Cauchy is voor elke j en zij $\epsilon > 0$.

Volledigheid van $\mathbb{R}^k$

We bekijken $\mathbb{R}^k$ met de Euclidische metriek $d(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \sqrt{\sum_{j=1}^k (x_j - y_j)^2}$.

Lemma 13.3

Een rij $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ in $\mathbb{R}^k$ convergeert desda voor elke $j \in \{1, \ldots, k\}$ de rij $\left(x_j^{(n)}\right)$ convergeert.

Een rij $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ in $\mathbb{R}^k$ is Cauchy desda voor elke $j \in \{1, \ldots, k\}$ de rij $\left(x_j^{(n)}\right)$ Cauchy is.

We bewijzen de tweede bewering. Merk op dat voor elke j geldt

$$|x_j - y_j| \leq d(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) \leq \sqrt{k} \max_{1 \leq j \leq k} |x_j - y_j|.$$

1. Stel dat $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ Cauchy is in $\mathbb{R}^k$. Als $d\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}, \vec{\mathbf{x}}^{(m)}\right) < \epsilon$, dan geldt ook voor elke j dat $|x_j^{(n)} - x_j^{(m)}| < \epsilon$. Dus de rij $\left(x_j^{(n)}\right)$ is voor elke j Cauchy in $\mathbb{R}$.
2. Stel nu dat $\left(x_j^{(n)}\right)$ Cauchy is voor elke j en zij $\epsilon > 0$.
   - Er bestaat voor elke j een N_j zodat $\left|x_j^{(n)} - x_j^{(m)}\right| < \epsilon$ als $n, m > N_j$.

Volledigheid van $\mathbb{R}^k$

We bekijken $\mathbb{R}^k$ met de Euclidische metriek $d(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \sqrt{\sum_{j=1}^{k}(x_j - y_j)^2}$.

Lemma 13.3

Een rij $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ in $\mathbb{R}^k$ convergeert desda voor elke $j \in \{1, \ldots, k\}$ de rij $\left(x_j^{(n)}\right)$ convergeert.

Een rij $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ in $\mathbb{R}^k$ is Cauchy desda voor elke $j \in \{1, \ldots, k\}$ de rij $\left(x_j^{(n)}\right)$ Cauchy is.

We bewijzen de tweede bewering. Merk op dat voor elke j geldt

$$|x_j - y_j| \leq d(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) \leq \sqrt{k} \max_{1 \leq j \leq k} |x_j - y_j|.$$

1. Stel dat $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ Cauchy is in $\mathbb{R}^k$. Als $d\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}, \vec{\mathbf{x}}^{(m)}\right) < \epsilon$, dan geldt ook voor elke j dat $|x_j^{(n)} - x_j^{(m)}| < \epsilon$. Dus de rij $\left(x_j^{(n)}\right)$ is voor elke j Cauchy in $\mathbb{R}$.
2. Stel nu dat $\left(x_j^{(n)}\right)$ Cauchy is voor elke j en zij $\epsilon > 0$.
   - Er bestaat voor elke j een N_j zodat $\left|x_j^{(n)} - x_j^{(m)}\right| < \epsilon$ als $n, m > N_j$.
   - Neem nu $N = \max(N_1, \ldots, N_k)$.

Volledigheid van $\mathbb{R}^k$

We bekijken $\mathbb{R}^k$ met de Euclidische metriek $d(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \sqrt{\sum_{j=1}^k (x_j - y_j)^2}$.

Lemma 13.3

Een rij $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ in $\mathbb{R}^k$ convergeert desda voor elke $j \in \{1, \ldots, k\}$ de rij $\left(x_j^{(n)}\right)$ convergeert.

Een rij $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ in $\mathbb{R}^k$ is Cauchy desda voor elke $j \in \{1, \ldots, k\}$ de rij $\left(x_j^{(n)}\right)$ Cauchy is.

We bewijzen de tweede bewering. Merk op dat voor elke j geldt

$$|x_j - y_j| \leq d(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) \leq \sqrt{k} \max_{1 \leq j \leq k} |x_j - y_j|.$$

1. Stel dat $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ Cauchy is in $\mathbb{R}^k$. Als $d\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}, \vec{\mathbf{x}}^{(m)}\right) < \epsilon$, dan geldt ook voor elke j dat $|x_j^{(n)} - x_j^{(m)}| < \epsilon$. Dus de rij $\left(x_j^{(n)}\right)$ is voor elke j Cauchy in $\mathbb{R}$.
2. Stel nu dat $\left(x_j^{(n)}\right)$ Cauchy is voor elke j en zij $\epsilon > 0$.
   - Er bestaat voor elke j een N_j zodat $\left|x_j^{(n)} - x_j^{(m)}\right| < \epsilon$ als $n, m > N_j$.
   - Neem nu $N = \max(N_1, \ldots, N_k)$. Voor $n, m > N$ geldt

$$d\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}, \vec{\mathbf{x}}^{(m)}\right)$$

Volledigheid van $\mathbb{R}^k$

We bekijken $\mathbb{R}^k$ met de Euclidische metriek $d(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \sqrt{\sum_{j=1}^k (x_j - y_j)^2}$.

Lemma 13.3

Een rij $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ in $\mathbb{R}^k$ convergeert desda voor elke $j \in \{1, \ldots, k\}$ de rij $\left(x_j^{(n)}\right)$ convergeert.

Een rij $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ in $\mathbb{R}^k$ is Cauchy desda voor elke $j \in \{1, \ldots, k\}$ de rij $\left(x_j^{(n)}\right)$ Cauchy is.

We bewijzen de tweede bewering. Merk op dat voor elke j geldt

$$|x_j - y_j| \leq d(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) \leq \sqrt{k} \max_{1 \leq j \leq k} |x_j - y_j|.$$

1. Stel dat $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ Cauchy is in $\mathbb{R}^k$. Als $d\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}, \vec{\mathbf{x}}^{(m)}\right) < \epsilon$, dan geldt ook voor elke j dat $|x_j^{(n)} - x_j^{(m)}| < \epsilon$. Dus de rij $\left(x_j^{(n)}\right)$ is voor elke j Cauchy in $\mathbb{R}$.
2. Stel nu dat $\left(x_j^{(n)}\right)$ Cauchy is voor elke j en zij $\epsilon > 0$.
   - Er bestaat voor elke j een N_j zodat $\left|x_j^{(n)} - x_j^{(m)}\right| < \epsilon$ als $n, m > N_j$.
   - Neem nu $N = \max(N_1, \ldots, N_k)$. Voor $n, m > N$ geldt

$$d\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}, \vec{\mathbf{x}}^{(m)}\right) \leq \sqrt{k} \max_{1 \leq j \leq k} \left|x_j^{(n)} - x_j^{(m)}\right|$$

Volledigheid van $\mathbb{R}^k$

We bekijken $\mathbb{R}^k$ met de Euclidische metriek $d(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \sqrt{\sum_{j=1}^k (x_j - y_j)^2}$.

Lemma 13.3

Een rij $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ in $\mathbb{R}^k$ convergeert desda voor elke $j \in \{1, \ldots, k\}$ de rij $\left(x_j^{(n)}\right)$ convergeert.
Een rij $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ in $\mathbb{R}^k$ is Cauchy desda voor elke $j \in \{1, \ldots, k\}$ de rij $\left(x_j^{(n)}\right)$ Cauchy is.

We bewijzen de tweede bewering. Merk op dat voor elke j geldt

$$|x_j - y_j| \leq d(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) \leq \sqrt{k} \max_{1 \leq j \leq k} |x_j - y_j|.$$

1. Stel dat $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ Cauchy is in $\mathbb{R}^k$. Als $d\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}, \vec{\mathbf{x}}^{(m)}\right) < \epsilon$, dan geldt ook voor elke j dat $|x_j^{(n)} - x_j^{(m)}| < \epsilon$. Dus de rij $\left(x_j^{(n)}\right)$ is voor elke j Cauchy in $\mathbb{R}$.
2. Stel nu dat $\left(x_j^{(n)}\right)$ Cauchy is voor elke j en zij $\epsilon > 0$.
   - Er bestaat voor elke j een N_j zodat $\left|x_j^{(n)} - x_j^{(m)}\right| < \epsilon$ als $n, m > N_j$.
   - Neem nu $N = \max(N_1, \ldots, N_k)$. Voor $n, m > N$ geldt

$$d\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}, \vec{\mathbf{x}}^{(m)}\right) \leq \sqrt{k} \max_{1 \leq j \leq k} \left|x_j^{(n)} - x_j^{(m)}\right| < \sqrt{k} \cdot \epsilon.$$

Volledigheid van $\mathbb{R}^k$

We bekijken $\mathbb{R}^k$ met de Euclidische metriek $d(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \sqrt{\sum_{j=1}^k (x_j - y_j)^2}$.

Lemma 13.3

Een rij $(\vec{\mathbf{x}}^{(n)})$ in $\mathbb{R}^k$ convergeert desda voor elke $j \in \{1, \ldots, k\}$ de rij $(x_j^{(n)})$ convergeert.
Een rij $(\vec{\mathbf{x}}^{(n)})$ in $\mathbb{R}^k$ is Cauchy desda voor elke $j \in \{1, \ldots, k\}$ de rij $(x_j^{(n)})$ Cauchy is.

We bewijzen de tweede bewering. Merk op dat voor elke j geldt

$$|x_j - y_j| \leq d(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) \leq \sqrt{k} \max_{1 \leq j \leq k} |x_j - y_j|.$$

1. Stel dat $(\vec{\mathbf{x}}^{(n)})$ Cauchy is in $\mathbb{R}^k$. Als $d(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}, \vec{\mathbf{x}}^{(m)}) < \epsilon$, dan geldt ook voor elke j dat $|x_j^{(n)} - x_j^{(m)}| < \epsilon$. Dus de rij $(x_j^{(n)})$ is voor elke j Cauchy in $\mathbb{R}$.
2. Stel nu dat $(x_j^{(n)})$ Cauchy is voor elke j en zij $\epsilon > 0$.
   - Er bestaat voor elke j een N_j zodat $\left|x_j^{(n)} - x_j^{(m)}\right| < \epsilon$ als $n, m > N_j$.
   - Neem nu $N = \max(N_1, \ldots, N_k)$. Voor $n, m > N$ geldt

     $$d(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}, \vec{\mathbf{x}}^{(m)}) \leq \sqrt{k} \max_{1 \leq j \leq k} \left|x_j^{(n)} - x_j^{(m)}\right| < \sqrt{k} \cdot \epsilon.$$

   - Dus is $(\vec{\mathbf{x}}^{(n)})$ Cauchy.

Volledigheid van $\mathbb{R}^k$

We bekijken $\mathbb{R}^k$ met de Euclidische metriek $d(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} (x_j - y_j)^2}$.

Lemma 13.3

Een rij $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ in $\mathbb{R}^k$ convergeert desda voor elke $j \in \{1, \ldots, k\}$ de rij $\left(x_j^{(n)}\right)$ convergeert.

Een rij $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ in $\mathbb{R}^k$ is Cauchy desda voor elke $j \in \{1, \ldots, k\}$ de rij $\left(x_j^{(n)}\right)$ Cauchy is.

Volledigheid van $\mathbb{R}^k$

We bekijken $\mathbb{R}^k$ met de Euclidische metriek $d(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \sqrt{\sum_{j=1}^k (x_j - y_j)^2}$.

Lemma 13.3

Een rij $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ in $\mathbb{R}^k$ convergeert desda voor elke $j \in \{1, \ldots, k\}$ de rij $\left(x_j^{(n)}\right)$ convergeert.

Een rij $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ in $\mathbb{R}^k$ is Cauchy desda voor elke $j \in \{1, \ldots, k\}$ de rij $\left(x_j^{(n)}\right)$ Cauchy is.

Stelling 13.4

De ruimte $\mathbb{R}^k$ is volledig: elke Cauchyrij heeft een limiet.

Volledigheid van $\mathbb{R}^k$

We bekijken $\mathbb{R}^k$ met de Euclidische metriek $d(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \sqrt{\sum_{j=1}^{k}(x_j - y_j)^2}$.

Lemma 13.3

Een rij $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ in $\mathbb{R}^k$ convergeert desda voor elke $j \in \{1, \ldots, k\}$ de rij $\left(x_j^{(n)}\right)$ convergeert.

Een rij $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ in $\mathbb{R}^k$ is Cauchy desda voor elke $j \in \{1, \ldots, k\}$ de rij $\left(x_j^{(n)}\right)$ Cauchy is.

Stelling 13.4

De ruimte $\mathbb{R}^k$ is volledig: elke Cauchyrij heeft een limiet.

Bewijs:

Volledigheid van $\mathbb{R}^k$

We bekijken $\mathbb{R}^k$ met de Euclidische metriek $d(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \sqrt{\sum_{j=1}^k (x_j - y_j)^2}$.

Lemma 13.3

Een rij $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ in $\mathbb{R}^k$ convergeert desda voor elke $j \in \{1, \ldots, k\}$ de rij $\left(x_j^{(n)}\right)$ convergeert.
Een rij $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ in $\mathbb{R}^k$ is Cauchy desda voor elke $j \in \{1, \ldots, k\}$ de rij $\left(x_j^{(n)}\right)$ Cauchy is.

Stelling 13.4

De ruimte $\mathbb{R}^k$ is volledig: elke Cauchyrij heeft een limiet.

Bewijs:

- Zij $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ een Cauchyrij in $\mathbb{R}^k$.

Volledigheid van $\mathbb{R}^k$

We bekijken $\mathbb{R}^k$ met de Euclidische metriek $d(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \sqrt{\sum_{j=1}^{k}(x_j - y_j)^2}$.

Lemma 13.3

Een rij $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ in $\mathbb{R}^k$ convergeert desda voor elke $j \in \{1, \ldots, k\}$ de rij $\left(x_j^{(n)}\right)$ convergeert.

Een rij $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ in $\mathbb{R}^k$ is Cauchy desda voor elke $j \in \{1, \ldots, k\}$ de rij $\left(x_j^{(n)}\right)$ Cauchy is.

Stelling 13.4

De ruimte $\mathbb{R}^k$ is volledig: elke Cauchyrij heeft een limiet.

Bewijs:

- Zij $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ een Cauchyrij in $\mathbb{R}^k$.
- Dan is $\left(x_j^{(n)}\right)$ een Cauchyrij in $\mathbb{R}$ voor alle j (lemma).

Volledigheid van $\mathbb{R}^k$

We bekijken $\mathbb{R}^k$ met de Euclidische metriek $d(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \sqrt{\sum_{j=1}^k (x_j - y_j)^2}$.

Lemma 13.3

Een rij $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ in $\mathbb{R}^k$ convergeert desda voor elke $j \in \{1, \ldots, k\}$ de rij $\left(x_j^{(n)}\right)$ convergeert.
Een rij $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ in $\mathbb{R}^k$ is Cauchy desda voor elke $j \in \{1, \ldots, k\}$ de rij $\left(x_j^{(n)}\right)$ Cauchy is.

Stelling 13.4

De ruimte $\mathbb{R}^k$ is volledig: elke Cauchyrij heeft een limiet.

Bewijs:

- Zij $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ een Cauchyrij in $\mathbb{R}^k$.
- Dan is $\left(x_j^{(n)}\right)$ een Cauchyrij in $\mathbb{R}$ voor alle j (lemma).
- Omdat $\mathbb{R}$ volledig is

Volledigheid van $\mathbb{R}^k$

We bekijken $\mathbb{R}^k$ met de Euclidische metriek $d(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \sqrt{\sum_{j=1}^k (x_j - y_j)^2}$.

Lemma 13.3

Een rij $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ in $\mathbb{R}^k$ convergeert desda voor elke $j \in \{1, \ldots, k\}$ de rij $\left(x_j^{(n)}\right)$ convergeert.
Een rij $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ in $\mathbb{R}^k$ is Cauchy desda voor elke $j \in \{1, \ldots, k\}$ de rij $\left(x_j^{(n)}\right)$ Cauchy is.

Stelling 13.4

De ruimte $\mathbb{R}^k$ is volledig: elke Cauchyrij heeft een limiet.

Bewijs:

- Zij $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ een Cauchyrij in $\mathbb{R}^k$.
- Dan is $\left(x_j^{(n)}\right)$ een Cauchyrij in $\mathbb{R}$ voor alle j (lemma).
- Omdat $\mathbb{R}$ volledig is, geldt voor elke j dat $x_j^{(n)} \to x_j$ voor zekere $x_j \in \mathbb{R}$.

Volledigheid van $\mathbb{R}^k$

We bekijken $\mathbb{R}^k$ met de Euclidische metriek $d(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \sqrt{\sum_{j=1}^k (x_j - y_j)^2}$.

Lemma 13.3

Een rij $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ in $\mathbb{R}^k$ convergeert desda voor elke $j \in \{1, \ldots, k\}$ de rij $\left(x_j^{(n)}\right)$ convergeert.

Een rij $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ in $\mathbb{R}^k$ is Cauchy desda voor elke $j \in \{1, \ldots, k\}$ de rij $\left(x_j^{(n)}\right)$ Cauchy is.

Stelling 13.4

De ruimte $\mathbb{R}^k$ is volledig: elke Cauchyrij heeft een limiet.

Bewijs:

- Zij $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ een Cauchyrij in $\mathbb{R}^k$.
- Dan is $\left(x_j^{(n)}\right)$ een Cauchyrij in $\mathbb{R}$ voor alle j (lemma).
- Omdat $\mathbb{R}$ volledig is, geldt voor elke j dat $x_j^{(n)} \to x_j$ voor zekere $x_j \in \mathbb{R}$.
- Dus convergeert $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ in $\mathbb{R}^k$ (lemma).

Bolzano-Weierstrass in $\mathbb{R}^k$

Herinnering: stelling van Bolzano-Weierstrass (11.5)

Iedere begrensde rij in $\mathbb{R}$ heeft een convergente deelrij.

Bolzano-Weierstrass in $\mathbb{R}^k$

Herinnering: stelling van Bolzano-Weierstrass (11.5)

Iedere begrensde rij in $\mathbb{R}$ heeft een convergente deelrij.

We noemen een verzameling $S \subseteq \mathbb{R}^k$ begrensd

Bolzano-Weierstrass in $\mathbb{R}^k$

Herinnering: stelling van Bolzano-Weierstrass (11.5)

Iedere begrensde rij in $\mathbb{R}$ heeft een convergente deelrij.

We noemen een verzameling $S \subseteq \mathbb{R}^k$ begrensd als er een $M > 0$ bestaat zodat $\max_{1 \leq j \leq k} |x_j| \leq M$ voor alle $\vec{\mathbf{x}} \in S$.

Bolzano-Weierstrass in $\mathbb{R}^k$

Herinnering: stelling van Bolzano-Weierstrass (11.5)

Iedere begrensde rij in $\mathbb{R}$ heeft een convergente deelrij.

We noemen een verzameling $S \subseteq \mathbb{R}^k$ begrensd als er een $M > 0$ bestaat zodat $\max_{1 \leq j \leq k} |x_j| \leq M$ voor alle $\vec{\mathbf{x}} \in S$.

Stelling van Bolzano-Weierstrass (13.5)

Iedere begrensde rij in $\mathbb{R}^k$ heeft een convergente deelrij.

Bolzano-Weierstrass in $\mathbb{R}^k$

Herinnering: stelling van Bolzano-Weierstrass (11.5)

Iedere begrensde rij in $\mathbb{R}$ heeft een convergente deelrij.

We noemen een verzameling $S \subseteq \mathbb{R}^k$ begrensd als er een $M > 0$ bestaat zodat $\max_{1 \le j \le k} |x_j| \le M$ voor alle $\vec{\mathbf{x}} \in S$.

Stelling van Bolzano-Weierstrass (13.5)

Iedere begrensde rij in $\mathbb{R}^k$ heeft een convergente deelrij.

Bewijs: zij $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ een begrensde rij in $\mathbb{R}^n$.

Bolzano-Weierstrass in $\mathbb{R}^k$

Herinnering: stelling van Bolzano-Weierstrass (11.5)

Iedere begrensde rij in $\mathbb{R}$ heeft een convergente deelrij.

We noemen een verzameling $S \subseteq \mathbb{R}^k$ begrensd als er een $M > 0$ bestaat zodat $\max_{1 \le j \le k} |x_j| \le M$ voor alle $\vec{\mathbf{x}} \in S$.

Stelling van Bolzano-Weierstrass (13.5)

Iedere begrensde rij in $\mathbb{R}^k$ heeft een convergente deelrij.

Bewijs: zij $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ een begrensde rij in $\mathbb{R}^n$.

- Voor elke j is $\left(x_j^{(n)}\right)$ begrensd.

Bolzano-Weierstrass in $\mathbb{R}^k$

Herinnering: stelling van Bolzano-Weierstrass (11.5)

Iedere begrensde rij in $\mathbb{R}$ heeft een convergente deelrij.

We noemen een verzameling $S \subseteq \mathbb{R}^k$ begrensd als er een $M > 0$ bestaat zodat $\max_{1 \leq j \leq k} |x_j| \leq M$ voor alle $\vec{\mathbf{x}} \in S$.

Stelling van Bolzano-Weierstrass (13.5)

Iedere begrensde rij in $\mathbb{R}^k$ heeft een convergente deelrij.

Bewijs: zij $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ een begrensde rij in $\mathbb{R}^n$.

- Voor elke j is $\left(x_j^{(n)}\right)$ begrensd.
- We kunnen dus $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ vervangen door een deelrij zodat $\left(x_1^{(n)}\right)$ convergeert.

Bolzano-Weierstrass in $\mathbb{R}^k$

Herinnering: stelling van Bolzano-Weierstrass (11.5)

Iedere begrensde rij in $\mathbb{R}$ heeft een convergente deelrij.

We noemen een verzameling $S \subseteq \mathbb{R}^k$ begrensd als er een $M > 0$ bestaat zodat $\max_{1\leq j\leq k} |x_j| \leq M$ voor alle $\vec{\mathbf{x}} \in S$.

Stelling van Bolzano-Weierstrass (13.5)

Iedere begrensde rij in $\mathbb{R}^k$ heeft een convergente deelrij.

Bewijs: zij $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ een begrensde rij in $\mathbb{R}^n$.

- Voor elke j is $\left(x_j^{(n)}\right)$ begrensd.
- We kunnen dus $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ vervangen door een deelrij zodat $\left(x_1^{(n)}\right)$ convergeert.
- We kunnen vervolgens $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ vervangen door een deelrij zodat $\left(x_2^{(n)}\right)$ convergeert.

Bolzano-Weierstrass in $\mathbb{R}^k$

Herinnering: stelling van Bolzano-Weierstrass (11.5)

Iedere begrensde rij in $\mathbb{R}$ heeft een convergente deelrij.

We noemen een verzameling $S \subseteq \mathbb{R}^k$ begrensd als er een $M > 0$ bestaat zodat $\max_{1 \leq j \leq k} |x_j| \leq M$ voor alle $\vec{\mathbf{x}} \in S$.

Stelling van Bolzano-Weierstrass (13.5)

Iedere begrensde rij in $\mathbb{R}^k$ heeft een convergente deelrij.

Bewijs: zij $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ een begrensde rij in $\mathbb{R}^n$.

- Voor elke j is $\left(x_j^{(n)}\right)$ begrensd.
- We kunnen dus $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ vervangen door een deelrij zodat $\left(x_1^{(n)}\right)$ convergeert.
- We kunnen vervolgens $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ vervangen door een deelrij zodat $\left(x_2^{(n)}\right)$ convergeert.
- Dan convergeert $\left(x_1^{(n)}\right)$ nog steeds.

Bolzano-Weierstrass in $\mathbb{R}^k$

Herinnering: stelling van Bolzano-Weierstrass (11.5)

Iedere begrensde rij in $\mathbb{R}$ heeft een convergente deelrij.

We noemen een verzameling $S \subseteq \mathbb{R}^k$ begrensd als er een $M > 0$ bestaat zodat $\max_{1 \leq j \leq k} |x_j| \leq M$ voor alle $\vec{\mathbf{x}} \in S$.

Stelling van Bolzano-Weierstrass (13.5)

Iedere begrensde rij in $\mathbb{R}^k$ heeft een convergente deelrij.

Bewijs: zij $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ een begrensde rij in $\mathbb{R}^n$.

- Voor elke j is $\left(x_j^{(n)}\right)$ begrensd.
- We kunnen dus $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ vervangen door een deelrij zodat $\left(x_1^{(n)}\right)$ convergeert.
- We kunnen vervolgens $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ vervangen door een deelrij zodat $\left(x_2^{(n)}\right)$ convergeert.
- Dan convergeert $\left(x_1^{(n)}\right)$ nog steeds.
- Na k keer herhalen krijgen we een deelrij zodat $\left(x_j^{(n)}\right)$ convergeert voor elke j.

Bolzano-Weierstrass in $\mathbb{R}^k$

Herinnering: stelling van Bolzano-Weierstrass (11.5)

Iedere begrensde rij in $\mathbb{R}$ heeft een convergente deelrij.

We noemen een verzameling $S \subseteq \mathbb{R}^k$ begrensd als er een $M > 0$ bestaat zodat $\max_{1 \leq j \leq k} |x_j| \leq M$ voor alle $\vec{\mathbf{x}} \in S$.

Stelling van Bolzano-Weierstrass (13.5)

Iedere begrensde rij in $\mathbb{R}^k$ heeft een convergente deelrij.

Bewijs: zij $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ een begrensde rij in $\mathbb{R}^n$.

- Voor elke j is $\left(x_j^{(n)}\right)$ begrensd.
- We kunnen dus $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ vervangen door een deelrij zodat $\left(x_1^{(n)}\right)$ convergeert.
- We kunnen vervolgens $\left(\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ vervangen door een deelrij zodat $\left(x_2^{(n)}\right)$ convergeert.
- Dan convergeert $\left(x_1^{(n)}\right)$ nog steeds.
- Na k keer herhalen krijgen we een deelrij zodat $\left(x_j^{(n)}\right)$ convergeert voor elke j.
- Een toepassing van het lemma geeft dat de deelrij convergeert in $\mathbb{R}^k$.