Analyse: van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}^n$ hoorcollege

Heine-Borel (12)

Gerrit Oomens
G.Oomens@uva.nl

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica
Universiteit van Amsterdam

Compactheid van intervallen

Propositie 13.13

Een interval $F = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ is compact.

Bewijs: stel dat F niet compact is. Schrijf $\ell = b - a$ voor de lengte.

- Er bestaat een open overdekking $\mathcal{U}$ van F die geen eindige deeloverdekking heeft.
- Hak nu F in twee gesloten intervallen van lengte $\ell/2$.
- Minstens één van deze intervallen kan niet door eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt worden, zeg F_1.
- Hak F_1 weer op in twee intervallen van lengte $\ell/4$. We vinden $F_2 \subseteq F_1$ die niet door eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt kan worden.
- Zo vinden we een rij intervallen $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots$ waar elke F_n lengte $\ell/2^n$ heeft en niet door eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt kan worden.
- Kies $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \subseteq F$. Dan is er $U_0 \in \mathcal{U}$ zodat $x_0 \in U_0$.
- Omdat U_0 open is, bestaat er $r > 0$ zodat $B(x_0, r) \subseteq U_0$.
- Maar dan geldt voor voldoende grote n dat $\ell/2^n < r$ en dus $F_n \subseteq U_0$.
- Tegenspraak, want F_n kon niet met eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt worden.

Compactheid van k-cellen

Propositie 13.13

Een k-cel $F = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_k, b_k] \subseteq \mathbb{R}^k$ is compact.

Bewijs: stel dat F niet compact is. Schrijf $\ell = b - a\sqrt{\sum_{j=1}^{k}(b_j - a_j)^2}$ voor de lengtediameter.

- Er bestaat een open overdekking $\mathcal{U}$ van F die geen eindige deeloverdekking heeft.
- Hak nu F in twee gesloten intervallen van lengte $\ell/2$. 2^k gesloten k-cellen van diameter $\ell/2$.
- Minstens één van deze intervallencellen kan niet door eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt worden, zeg F_1.
- Hak F_1 weer op in twee intervallen van lengte $\ell/42^k$ cellen van diameter $\ell/4$. We vinden $F_2 \subseteq F_1$ die niet door eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt kan worden.
- Zo vinden we een rij intervallencellen $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots$ waar elke F_n lengte $\ell/2^n$diameter $\ell/2^n$ heeft en niet door eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt kan worden.
- Kies $x_0\vec{x_0} \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \subseteq F$. Dan is er $U_0 \in \mathcal{U}$ zodat $x_0\vec{x_0} \in U_0$.
- Omdat U_0 open is, bestaat er $r > 0$ zodat $B(x_0\vec{x_0}, r) \subseteq U_0$.
- Maar dan geldt voor voldoende grote n dat $\ell/2^n < r$ en dus $F_n \subseteq U_0$.
- Tegenspraak, want F_n kon niet met eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ overdekt worden.

Compactheid van gesloten verzamelingen

Propositie 13.13

Een k-cel $F = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_k, b_k] \subseteq \mathbb{R}^k$ is compact.

Gevolg

Elke gesloten en begrensde verzameling in $\mathbb{R}^k$ is compact.

Bewijs:

Opgave

Een gesloten deelverzameling van een compacte verzameling is weer compact.

Heine-Borel

Heine-Borel (Stelling 13.12)

Een deelverzameling $E \subseteq \mathbb{R}^k$ is compact desda E gesloten en begrensd is.

Bewijs van "$\Rightarrow$": stel dat E compact is.

- Begrensdheid: neem $\mathcal{U} = \{B(\vec{\mathbf{0}}, r) : r \in (0, \infty)\}$. Dit is een open overdekking van $\mathbb{R}^k$, dus zeker van E. Dus heeft $\mathcal{U}$ een eindige deeloverdekking.
- Dan bestaan er $r_1, \ldots, r_n$ zodat $E \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(\vec{\mathbf{0}}, r_n) = B\big(\vec{\mathbf{0}}, \max(r_1, \ldots, r_n)\big)$.
- Dus E is begrensd.

- Geslotenheid: we moeten bewijzen dat $\mathbb{R}^k \setminus E$ open is. Kies $\vec{\mathbf{x_0}} \in \mathbb{R}^k \setminus E$.
- Neem $V_m = \{\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^k : (\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x_0}}) > 1/m\}$. Dan is V_m open en $\bigcup_{m=1}^{\infty} V_m = \mathbb{R}^k \setminus \{\vec{\mathbf{x_0}}\}$.
- De V_m overdekken dus E, dus er is N zodat $E \subseteq \bigcup_{m=1}^{N} V_m = V_N$.
- Dan geldt $\mathbb{R}^k \setminus E \supseteq \mathbb{R}^k \setminus V_N = B(\vec{\mathbf{x_0}}, 1/N)^-$.
- In het bijzonder geldt $B(\vec{\mathbf{x_0}}, 1/N) \subseteq \mathbb{R}^k \setminus E$, dus $\vec{\mathbf{x_0}}$ is inwendig in $\mathbb{R}^k \setminus E$.
- Dit geldt voor willekeurige $\vec{\mathbf{x_0}}$, dus $\mathbb{R}^k \setminus E$ is open.