Analyse: van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}^n$ hoorcollege

Continue functies in metrische ruimtes (13)

Gerrit Oomens
G.Oomens@uva.nl

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica
Universiteit van Amsterdam

Continuïteit in metrische ruimtes

Definitie 21.1

Zij (S, d) en (S^*, d^*) metrische ruimtes en $f : S \to S^*$ een functie. We noemen f continu in $s_0 \in S$ als

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{zodat} \quad d(s, s_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad d^*\big(f(s), f(s_0)\big) < \epsilon.$$

Continuïteit in metrische ruimtes

Definitie 21.1

Zij (S, d) en (S^*, d^*) metrische ruimtes en $f : S \to S^*$ een functie. We noemen f continu in $s_0 \in S$ als

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{zodat} \quad d(s, s_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad d^*\big(f(s), f(s_0)\big) < \epsilon.$$

De gebruikelijke resultaten voor continue functies gelden:

Continuïteit in metrische ruimtes

Definitie 21.1

Zij (S, d) en (S^*, d^*) metrische ruimtes en $f\colon S \to S^*$ een functie. We noemen f continu in $s_0 \in S$ als

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{zodat} \quad d(s, s_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad d^*\big(f(s), f(s_0)\big) < \epsilon.$$

De gebruikelijke resultaten voor continue functies gelden:

- als f, g continu, dan is $f \circ g$ ook continu,

Continuïteit in metrische ruimtes

Definitie 21.1

Zij (S, d) en (S^*, d^*) metrische ruimtes en $f\colon S \to S^*$ een functie. We noemen f continu in $s_0 \in S$ als

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{zodat} \quad d(s, s_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad d^*\big(f(s), f(s_0)\big) < \epsilon.$$

De gebruikelijke resultaten voor continue functies gelden:

- als f, g continu, dan is $f \circ g$ ook continu,
- als $f, g\colon S \to \mathbb{R}$ continu,

Continuïteit in metrische ruimtes

Definitie 21.1

Zij (S, d) en (S^*, d^*) metrische ruimtes en $f\colon S \to S^*$ een functie. We noemen f continu in $s_0 \in S$ als

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{zodat} \quad d(s, s_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad d^*\big(f(s), f(s_0)\big) < \epsilon.$$

De gebruikelijke resultaten voor continue functies gelden:

- als f, g continu, dan is $f \circ g$ ook continu,
- als $f, g\colon S \to \mathbb{R}$ continu, dan zijn $f + g$ en $f \cdot g$ ook continu.

Continuïteit in metrische ruimtes

Definitie 21.1

Zij (S, d) en (S^*, d^*) metrische ruimtes en $f: S \to S^*$ een functie. We noemen f continu in $s_0 \in S$ als

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{zodat} \quad d(s, s_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad d^*\big(f(s), f(s_0)\big) < \epsilon.$$

De gebruikelijke resultaten voor continue functies gelden:

- als f, g continu, dan is $f \circ g$ ook continu,
- als $f, g: S \to \mathbb{R}$ continu, dan zijn $f + g$ en $f \cdot g$ ook continu.

Bekijk $S = \mathbb{R}^k$

Continuïteit in metrische ruimtes

Definitie 21.1

Zij (S, d) en (S^*, d^*) metrische ruimtes en $f\colon S \to S^*$ een functie. We noemen f continu in $s_0 \in S$ als

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{zodat} \quad d(s, s_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad d^*\big(f(s), f(s_0)\big) < \epsilon.$$

De gebruikelijke resultaten voor continue functies gelden:

- als f, g continu, dan is $f \circ g$ ook continu,
- als $f, g\colon S \to \mathbb{R}$ continu, dan zijn $f + g$ en $f \cdot g$ ook continu.

Bekijk $S = \mathbb{R}^k$ en de projectie $\pi_j\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ gegeven door $\pi_j(\vec{\mathbf{x}}) = x_j$.

Continuïteit in metrische ruimtes

Definitie 21.1

Zij (S, d) en (S^*, d^*) metrische ruimtes en $f: S \to S^*$ een functie. We noemen f continu in $s_0 \in S$ als

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{zodat} \quad d(s, s_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad d^*\big(f(s), f(s_0)\big) < \epsilon.$$

De gebruikelijke resultaten voor continue functies gelden:

- als f, g continu, dan is $f \circ g$ ook continu,
- als $f, g: S \to \mathbb{R}$ continu, dan zijn $f + g$ en $f \cdot g$ ook continu.

Bekijk $S = \mathbb{R}^k$ en de projectie $\pi_j: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ gegeven door $\pi_j(\vec{\mathbf{x}}) = x_j$. Dan is π_j continu:

Continuïteit in metrische ruimtes

Definitie 21.1

Zij (S, d) en (S^*, d^*) metrische ruimtes en $f\colon S \to S^*$ een functie. We noemen f continu in $s_0 \in S$ als

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{zodat} \quad d(s, s_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad d^*\big(f(s), f(s_0)\big) < \epsilon.$$

De gebruikelijke resultaten voor continue functies gelden:

- als f, g continu, dan is $f \circ g$ ook continu,
- als $f, g\colon S \to \mathbb{R}$ continu, dan zijn $f + g$ en $f \cdot g$ ook continu.

Bekijk $S = \mathbb{R}^k$ en de projectie $\pi_j\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ gegeven door $\pi_j(\vec{\mathbf{x}}) = x_j$. Dan is π_j continu:

$$d\big(\pi_j(\vec{\mathbf{x}}), \pi_j(\mathbf{x}\vec{\mathbf{0}})\big)$$

Continuïteit in metrische ruimtes

Definitie 21.1

Zij (S, d) en (S^*, d^*) metrische ruimtes en $f: S \to S^*$ een functie. We noemen f continu in $s_0 \in S$ als

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{zodat} \quad d(s, s_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad d^*\big(f(s), f(s_0)\big) < \epsilon.$$

De gebruikelijke resultaten voor continue functies gelden:

- als f, g continu, dan is $f \circ g$ ook continu,
- als $f, g: S \to \mathbb{R}$ continu, dan zijn $f + g$ en $f \cdot g$ ook continu.

Bekijk $S = \mathbb{R}^k$ en de projectie $\pi_j: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ gegeven door $\pi_j(\vec{\mathbf{x}}) = x_j$. Dan is π_j continu:

$$d\big(\pi_j(\vec{\mathbf{x}}), \pi_j(\vec{\mathbf{x^0}})\big) = |x_j - x_j^0|$$

Continuïteit in metrische ruimtes

Definitie 21.1

Zij (S, d) en (S^*, d^*) metrische ruimtes en $f : S \to S^*$ een functie. We noemen f continu in $s_0 \in S$ als

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{zodat} \quad d(s, s_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad d^*\big(f(s), f(s_0)\big) < \epsilon.$$

De gebruikelijke resultaten voor continue functies gelden:

- als f, g continu, dan is $f \circ g$ ook continu,
- als $f, g : S \to \mathbb{R}$ continu, dan zijn $f + g$ en $f \cdot g$ ook continu.

Bekijk $S = \mathbb{R}^k$ en de projectie $\pi_j : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ gegeven door $\pi_j(\vec{\mathbf{x}}) = x_j$. Dan is π_j continu:

$$d\big(\pi_j(\vec{\mathbf{x}}), \pi_j(\vec{\mathbf{x^0}})\big) = |x_j - x_j^0| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{k} |x_j - x_j^0|^2}$$

Continuïteit in metrische ruimtes

Definitie 21.1

Zij (S, d) en (S^*, d^*) metrische ruimtes en $f\colon S \to S^*$ een functie. We noemen f continu in $s_0 \in S$ als

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{zodat} \quad d(s, s_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad d^*\big(f(s), f(s_0)\big) < \epsilon.$$

De gebruikelijke resultaten voor continue functies gelden:

- als f, g continu, dan is $f \circ g$ ook continu,
- als $f, g\colon S \to \mathbb{R}$ continu, dan zijn $f + g$ en $f \cdot g$ ook continu.

Bekijk $S = \mathbb{R}^k$ en de projectie $\pi_j\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ gegeven door $\pi_j(\vec{\mathbf{x}}) = x_j$. Dan is π_j continu:

$$d\big(\pi_j(\vec{\mathbf{x}}), \pi_j(\vec{\mathbf{x^0}})\big) = |x_j - x_j^0| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{k} |x_j - x_j^0|^2} = d\big(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x^0}}\big).$$

Continuïteit in metrische ruimtes

Definitie 21.1

Zij (S, d) en (S^*, d^*) metrische ruimtes en $f\colon S \to S^*$ een functie. We noemen f continu in $s_0 \in S$ als

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{zodat} \quad d(s, s_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad d^*\big(f(s), f(s_0)\big) < \epsilon.$$

De gebruikelijke resultaten voor continue functies gelden:

- als f, g continu, dan is $f \circ g$ ook continu,
- als $f, g\colon S \to \mathbb{R}$ continu, dan zijn $f + g$ en $f \cdot g$ ook continu.

Bekijk $S = \mathbb{R}^k$ en de projectie $\pi_j\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ gegeven door $\pi_j(\vec{\mathbf{x}}) = x_j$. Dan is π_j continu:

$$d\big(\pi_j(\vec{\mathbf{x}}), \pi_j(\vec{\mathbf{x^0}})\big) = |x_j - x_j^0| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{k} |x_j - x_j^0|^2} = d\big(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x^0}}\big).$$

Dus $\delta = \epsilon$ voldoet in de definitie.

Continuïteit in metrische ruimtes

Definitie 21.1

Zij (S, d) en (S^*, d^*) metrische ruimtes en $f\colon S \to S^*$ een functie. We noemen f continu in $s_0 \in S$ als

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{zodat} \quad d(s, s_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad d^*\big(f(s), f(s_0)\big) < \epsilon.$$

De gebruikelijke resultaten voor continue functies gelden:

- als f, g continu, dan is $f \circ g$ ook continu,
- als $f, g\colon S \to \mathbb{R}$ continu, dan zijn $f + g$ en $f \cdot g$ ook continu.

Bekijk $S = \mathbb{R}^k$ en de projectie $\pi_j\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ gegeven door $\pi_j(\vec{\mathbf{x}}) = x_j$. Dan is π_j continu:

$$d\big(\pi_j(\vec{\mathbf{x}}), \pi_j(\vec{\mathbf{x^0}})\big) = |x_j - x_j^0| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{k} |x_j - x_j^0|^2} = d\big(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x^0}}\big).$$

Dus $\delta = \epsilon$ voldoet in de definitie. Hieruit volgt continuïteit van bijvoorbeeld

Continuïteit in metrische ruimtes

Definitie 21.1

Zij (S, d) en (S^*, d^*) metrische ruimtes en $f\colon S \to S^*$ een functie. We noemen f continu in $s_0 \in S$ als

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{zodat} \quad d(s, s_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad d^*\big(f(s), f(s_0)\big) < \epsilon.$$

De gebruikelijke resultaten voor continue functies gelden:

- als f, g continu, dan is $f \circ g$ ook continu,
- als $f, g\colon S \to \mathbb{R}$ continu, dan zijn $f + g$ en $f \cdot g$ ook continu.

Bekijk $S = \mathbb{R}^k$ en de projectie $\pi_j\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ gegeven door $\pi_j(\vec{\mathbf{x}}) = x_j$. Dan is π_j continu:

$$d\big(\pi_j(\vec{\mathbf{x}}), \pi_j(\vec{\mathbf{x^0}})\big) = |x_j - x_j^0| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{k} |x_j - x_j^0|^2} = d\big(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x^0}}\big).$$

Dus $\delta = \epsilon$ voldoet in de definitie. Hieruit volgt continuïteit van bijvoorbeeld

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\mapsto xyz \end{aligned}$$

Continuïteit in metrische ruimtes

Definitie 21.1

Zij (S, d) en (S^*, d^*) metrische ruimtes en $f: S \to S^*$ een functie. We noemen f continu in $s_0 \in S$ als

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{zodat} \quad d(s, s_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad d^*\big(f(s), f(s_0)\big) < \epsilon.$$

De gebruikelijke resultaten voor continue functies gelden:

- als f, g continu, dan is $f \circ g$ ook continu,
- als $f, g: S \to \mathbb{R}$ continu, dan zijn $f + g$ en $f \cdot g$ ook continu.

Bekijk $S = \mathbb{R}^k$ en de projectie $\pi_j: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ gegeven door $\pi_j(\vec{\mathbf{x}}) = x_j$. Dan is π_j continu:

$$d\big(\pi_j(\vec{\mathbf{x}}), \pi_j(\vec{\mathbf{x^0}})\big) = |x_j - x_j^0| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{k} |x_j - x_j^0|^2} = d\big(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x^0}}\big).$$

Dus $\delta = \epsilon$ voldoet in de definitie. Hieruit volgt continuïteit van bijvoorbeeld

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\mapsto xyz \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} g: \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto e^{x+y} \cos x \end{aligned}$$

Continuïteit van componenten

Stelling (c.f. 21.2)

Zij (S, d) een metrische ruimte en $f_1, \ldots, f_k \colon S \to \mathbb{R}$ afbeeldingen. Definieer $f \colon S \to \mathbb{R}^k$ door $f(s) = \big(f_1(s), \ldots, f_k(s)\big)$. Dan is f continu desda alle f_j dat zijn.

Continuïteit van componenten

Stelling (c.f. 21.2)

Zij (S, d) een metrische ruimte en $f_1, \ldots, f_k \colon S \to \mathbb{R}$ afbeeldingen. Definieer $f \colon S \to \mathbb{R}^k$ door $f(s) = \big(f_1(s), \ldots, f_k(s)\big)$. Dan is f continu desda alle f_j dat zijn.

"$\Rightarrow$"

Continuïteit van componenten

Stelling (c.f. 21.2)

Zij (S, d) een metrische ruimte en $f_1, \ldots, f_k \colon S \to \mathbb{R}$ afbeeldingen. Definieer $f \colon S \to \mathbb{R}^k$ door $f(s) = \big(f_1(s), \ldots, f_k(s)\big)$. Dan is f continu desda alle f_j dat zijn.

"$\Rightarrow$": volgt uit continuïteit van projecties en samenstellingen:

Continuïteit van componenten

Stelling (c.f. 21.2)

Zij (S, d) een metrische ruimte en $f_1, \ldots, f_k \colon S \to \mathbb{R}$ afbeeldingen. Definieer $f \colon S \to \mathbb{R}^k$ door $f(s) = \big(f_1(s), \ldots, f_k(s)\big)$. Dan is f continu desda alle f_j dat zijn.

"$\Rightarrow$": volgt uit continuïteit van projecties en samenstellingen: $f_j = \pi_j \circ f$.

Continuïteit van componenten

Stelling (c.f. 21.2)

Zij (S, d) een metrische ruimte en $f_1, \ldots, f_k \colon S \to \mathbb{R}$ afbeeldingen. Definieer $f \colon S \to \mathbb{R}^k$ door $f(s) = \big(f_1(s), \ldots, f_k(s)\big)$. Dan is f continu desda alle f_j dat zijn.

"$\Rightarrow$": volgt uit continuïteit van projecties en samenstellingen: $f_j = \pi_j \circ f$.

"$\Leftarrow$":

Continuïteit van componenten

Stelling (c.f. 21.2)

Zij (S, d) een metrische ruimte en $f_1, \ldots, f_k \colon S \to \mathbb{R}$ afbeeldingen. Definieer $f \colon S \to \mathbb{R}^k$ door $f(s) = \big(f_1(s), \ldots, f_k(s)\big)$. Dan is f continu desda alle f_j dat zijn.

"$\Rightarrow$": volgt uit continuïteit van projecties en samenstellingen: $f_j = \pi_j \circ f$.

"$\Leftarrow$": neem $s_0 \in S$ en laat $\epsilon > 0$.

Continuïteit van componenten

Stelling (c.f. 21.2)

Zij (S, d) een metrische ruimte en $f_1, \ldots, f_k \colon S \to \mathbb{R}$ afbeeldingen. Definieer $f \colon S \to \mathbb{R}^k$ door $f(s) = \big(f_1(s), \ldots, f_k(s)\big)$. Dan is f continu desda alle f_j dat zijn.

"$\Rightarrow$": volgt uit continuïteit van projecties en samenstellingen: $f_j = \pi_j \circ f$.

"$\Leftarrow$": neem $s_0 \in S$ en laat $\epsilon > 0$.

- Elke f_j is continu in s_0

Continuïteit van componenten

Stelling (c.f. 21.2)

Zij (S, d) een metrische ruimte en $f_1, \ldots, f_k \colon S \to \mathbb{R}$ afbeeldingen. Definieer $f \colon S \to \mathbb{R}^k$ door $f(s) = \big(f_1(s), \ldots, f_k(s)\big)$. Dan is f continu desda alle f_j dat zijn.

"$\Rightarrow$": volgt uit continuïteit van projecties en samenstellingen: $f_j = \pi_j \circ f$.

"$\Leftarrow$": neem $s_0 \in S$ en laat $\epsilon > 0$.

- Elke f_j is continu in s_0, dus er bestaat voor elke j een δ_j zodat $|f_j(s) - f_j(s_0)| < \epsilon$ als $d(s, s_0) < \delta_j$.

Continuïteit van componenten

Stelling (c.f. 21.2)

Zij (S, d) een metrische ruimte en $f_1, \dots, f_k \colon S \to \mathbb{R}$ afbeeldingen. Definieer $f \colon S \to \mathbb{R}^k$ door $f(s) = \big(f_1(s), \dots, f_k(s)\big)$. Dan is f continu desda alle f_j dat zijn.

"$\Rightarrow$": volgt uit continuïteit van projecties en samenstellingen: $f_j = \pi_j \circ f$.

"$\Leftarrow$": neem $s_0 \in S$ en laat $\epsilon > 0$.

- Elke f_j is continu in s_0, dus er bestaat voor elke j een δ_j zodat $|f_j(s) - f_j(s_0)| < \epsilon$ als $d(s, s_0) < \delta_j$.
- Definieer $\delta := \min(\delta_1, \dots, \delta_k)$.

Continuïteit van componenten

Stelling (c.f. 21.2)

Zij (S, d) een metrische ruimte en $f_1, \ldots, f_k \colon S \to \mathbb{R}$ afbeeldingen. Definieer $f \colon S \to \mathbb{R}^k$ door $f(s) = \big(f_1(s), \ldots, f_k(s)\big)$. Dan is f continu desda alle f_j dat zijn.

"$\Rightarrow$": volgt uit continuïteit van projecties en samenstellingen: $f_j = \pi_j \circ f$.

"$\Leftarrow$": neem $s_0 \in S$ en laat $\epsilon > 0$.

- Elke f_j is continu in s_0, dus er bestaat voor elke j een δ_j zodat $|f_j(s) - f_j(s_0)| < \epsilon$ als $d(s, s_0) < \delta_j$.
- Definieer $\delta := \min(\delta_1, \ldots, \delta_k)$.
- Als $d(s, s_0) < \delta$, dan geldt

$$d\big(f(s), f(s_0)\big)$$

Continuïteit van componenten

Stelling (c.f. 21.2)

Zij (S, d) een metrische ruimte en $f_1, \ldots, f_k \colon S \to \mathbb{R}$ afbeeldingen. Definieer $f \colon S \to \mathbb{R}^k$ door $f(s) = \big(f_1(s), \ldots, f_k(s)\big)$. Dan is f continu desda alle f_j dat zijn.

"$\Rightarrow$": volgt uit continuïteit van projecties en samenstellingen: $f_j = \pi_j \circ f$.

"$\Leftarrow$": neem $s_0 \in S$ en laat $\epsilon > 0$.

- Elke f_j is continu in s_0, dus er bestaat voor elke j een δ_j zodat $|f_j(s) - f_j(s_0)| < \epsilon$ als $d(s, s_0) < \delta_j$.
- Definieer $\delta := \min(\delta_1, \ldots, \delta_k)$.
- Als $d(s, s_0) < \delta$, dan geldt

$$d\big(f(s), f(s_0)\big) = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} |f_j(s) - f_j(s_0)|^2}$$

Continuïteit van componenten

Stelling (c.f. 21.2)

Zij (S, d) een metrische ruimte en $f_1, \ldots, f_k \colon S \to \mathbb{R}$ afbeeldingen. Definieer $f \colon S \to \mathbb{R}^k$ door $f(s) = \big(f_1(s), \ldots, f_k(s)\big)$. Dan is f continu desda alle f_j dat zijn.

"$\Rightarrow$": volgt uit continuïteit van projecties en samenstellingen: $f_j = \pi_j \circ f$.

"$\Leftarrow$": neem $s_0 \in S$ en laat $\epsilon > 0$.

- Elke f_j is continu in s_0, dus er bestaat voor elke j een δ_j zodat $|f_j(s) - f_j(s_0)| < \epsilon$ als $d(s, s_0) < \delta_j$.
- Definieer $\delta := \min(\delta_1, \ldots, \delta_k)$.
- Als $d(s, s_0) < \delta$, dan geldt

$$d\big(f(s), f(s_0)\big) = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} |f_j(s) - f_j(s_0)|^2} < \sqrt{\sum_{j=1}^{k} \epsilon^2}$$

Continuïteit van componenten

Stelling (c.f. 21.2)

Zij (S, d) een metrische ruimte en $f_1, \ldots, f_k \colon S \to \mathbb{R}$ afbeeldingen. Definieer $f \colon S \to \mathbb{R}^k$ door $f(s) = \big(f_1(s), \ldots, f_k(s)\big)$. Dan is f continu desda alle f_j dat zijn.

"$\Rightarrow$": volgt uit continuïteit van projecties en samenstellingen: $f_j = \pi_j \circ f$.

"$\Leftarrow$": neem $s_0 \in S$ en laat $\epsilon > 0$.

- Elke f_j is continu in s_0, dus er bestaat voor elke j een δ_j zodat $|f_j(s) - f_j(s_0)| < \epsilon$ als $d(s, s_0) < \delta_j$.
- Definieer $\delta := \min(\delta_1, \ldots, \delta_k)$.
- Als $d(s, s_0) < \delta$, dan geldt

$$d\big(f(s), f(s_0)\big) = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} |f_j(s) - f_j(s_0)|^2} < \sqrt{\sum_{j=1}^{k} \epsilon^2} = \sqrt{k}\,\epsilon.$$

Continuïteit van componenten

Stelling (c.f. 21.2)

Zij (S, d) een metrische ruimte en $f_1, \ldots, f_k \colon S \to \mathbb{R}$ afbeeldingen. Definieer $f \colon S \to \mathbb{R}^k$ door $f(s) = \big(f_1(s), \ldots, f_k(s)\big)$. Dan is f continu desda alle f_j dat zijn.

"$\Rightarrow$": volgt uit continuïteit van projecties en samenstellingen: $f_j = \pi_j \circ f$.

"$\Leftarrow$": neem $s_0 \in S$ en laat $\epsilon > 0$.

- Elke f_j is continu in s_0, dus er bestaat voor elke j een δ_j zodat $|f_j(s) - f_j(s_0)| < \epsilon$ als $d(s, s_0) < \delta_j$.
- Definieer $\delta := \min(\delta_1, \ldots, \delta_k)$.
- Als $d(s, s_0) < \delta$, dan geldt

$$d\big(f(s), f(s_0)\big) = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} |f_j(s) - f_j(s_0)|^2} < \sqrt{\sum_{j=1}^{k} \epsilon^2} = \sqrt{k}\,\epsilon.$$

- We zien dat f continu is in s_0.

Continuïteit in topologische zin

Stelling 21.3

Zij (S, d) en (S^*, d^*) metrische ruimten. Een $f\colon S \to S^*$ is continu desda $f^{-1}(U)$ open is voor elke open $U \subseteq S^*$.

Continuïteit in topologische zin

Stelling 21.3

Zij (S, d) en (S^*, d^*) metrische ruimten. Een $f\colon S \to S^*$ is continu desda $f^{-1}(U)$ open is voor elke open $U \subseteq S^*$.

"$\Leftarrow$":

Continuïteit in topologische zin

Stelling 21.3

Zij (S, d) en (S^*, d^*) metrische ruimten. Een $f\colon S \to S^*$ is continu desda $f^{-1}(U)$ open is voor elke open $U \subseteq S^*$.

"$\Leftarrow$": stel dat $f^{-1}(U)$ open is voor alle open U.

Continuïteit in topologische zin

Stelling 21.3

Zij (S, d) en (S^*, d^*) metrische ruimten. Een $f: S \to S^*$ is continu desda $f^{-1}(U)$ open is voor elke open $U \subseteq S^*$.

"$\Leftarrow$": stel dat $f^{-1}(U)$ open is voor alle open U. Neem $s_0 \in S$ en $\epsilon > 0$.

Continuïteit in topologische zin

Stelling 21.3

Zij (S, d) en (S^*, d^*) metrische ruimten. Een $f\colon S \to S^*$ is continu desda $f^{-1}(U)$ open is voor elke open $U \subseteq S^*$.

"$\Leftarrow$": stel dat $f^{-1}(U)$ open is voor alle open U. Neem $s_0 \in S$ en $\epsilon > 0$.

- Kies $U = B\big(f(s_0), \epsilon\big)$.

Continuïteit in topologische zin

Stelling 21.3

Zij (S, d) en (S^*, d^*) metrische ruimten. Een $f\colon S \to S^*$ is continu desda $f^{-1}(U)$ open is voor elke open $U \subseteq S^*$.

"$\Leftarrow$": stel dat $f^{-1}(U)$ open is voor alle open U. Neem $s_0 \in S$ en $\epsilon > 0$.

- Kies $U = B\big(f(s_0), \epsilon\big)$. Dan is U open

Continuïteit in topologische zin

Stelling 21.3

Zij (S, d) en (S^*, d^*) metrische ruimten. Een $f\colon S \to S^*$ is continu desda $f^{-1}(U)$ open is voor elke open $U \subseteq S^*$.

"$\Leftarrow$": stel dat $f^{-1}(U)$ open is voor alle open U. Neem $s_0 \in S$ en $\epsilon > 0$.

- Kies $U = B\big(f(s_0), \epsilon\big)$. Dan is U open en $s_0 \in f^{-1}(U)$.

Continuïteit in topologische zin

Stelling 21.3

Zij (S, d) en (S^*, d^*) metrische ruimten. Een $f: S \to S^*$ is continu desda $f^{-1}(U)$ open is voor elke open $U \subseteq S^*$.

"$\Leftarrow$": stel dat $f^{-1}(U)$ open is voor alle open U. Neem $s_0 \in S$ en $\epsilon > 0$.

- Kies $U = B\big(f(s_0), \epsilon\big)$. Dan is U open en $s_0 \in f^{-1}(U)$.
- $f^{-1}(U)$ is open

Continuïteit in topologische zin

Stelling 21.3

Zij (S, d) en (S^*, d^*) metrische ruimten. Een $f\colon S \to S^*$ is continu desda $f^{-1}(U)$ open is voor elke open $U \subseteq S^*$.

"$\Leftarrow$": stel dat $f^{-1}(U)$ open is voor alle open U. Neem $s_0 \in S$ en $\epsilon > 0$.

- Kies $U = B\big(f(s_0), \epsilon\big)$. Dan is U open en $s_0 \in f^{-1}(U)$.
- $f^{-1}(U)$ is open, dus er is $\delta > 0$ zodat $B(s_0, \delta) \subseteq f^{-1}(U)$.

Continuïteit in topologische zin

Stelling 21.3

Zij (S, d) en (S^*, d^*) metrische ruimten. Een $f: S \to S^*$ is continu desda $f^{-1}(U)$ open is voor elke open $U \subseteq S^*$.

"$\Leftarrow$": stel dat $f^{-1}(U)$ open is voor alle open U. Neem $s_0 \in S$ en $\epsilon > 0$.

- Kies $U = B\big(f(s_0), \epsilon\big)$. Dan is U open en $s_0 \in f^{-1}(U)$.
- $f^{-1}(U)$ is open, dus er is $\delta > 0$ zodat $B(s_0, \delta) \subseteq f^{-1}(U)$.
- Nu:
  $d(s, s_0) < \delta$

Continuïteit in topologische zin

Stelling 21.3

Zij (S, d) en (S^*, d^*) metrische ruimten. Een $f\colon S \to S^*$ is continu desda $f^{-1}(U)$ open is voor elke open $U \subseteq S^*$.

"$\Leftarrow$": stel dat $f^{-1}(U)$ open is voor alle open U. Neem $s_0 \in S$ en $\epsilon > 0$.

- Kies $U = B\big(f(s_0), \epsilon\big)$. Dan is U open en $s_0 \in f^{-1}(U)$.
- $f^{-1}(U)$ is open, dus er is $\delta > 0$ zodat $B(s_0, \delta) \subseteq f^{-1}(U)$.
- Nu:
  $d(s, s_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad s \in B(s_0, \delta)$

Continuïteit in topologische zin

Stelling 21.3

Zij (S, d) en (S^*, d^*) metrische ruimten. Een $f\colon S \to S^*$ is continu desda $f^{-1}(U)$ open is voor elke open $U \subseteq S^*$.

"$\Leftarrow$": stel dat $f^{-1}(U)$ open is voor alle open U. Neem $s_0 \in S$ en $\epsilon > 0$.

- Kies $U = B\big(f(s_0), \epsilon\big)$. Dan is U open en $s_0 \in f^{-1}(U)$.
- $f^{-1}(U)$ is open, dus er is $\delta > 0$ zodat $B(s_0, \delta) \subseteq f^{-1}(U)$.
- Nu:
  $d(s, s_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad s \in B(s_0, \delta) \quad \Rightarrow \quad f(s) \in U$

Continuïteit in topologische zin

Stelling 21.3

Zij (S, d) en (S^*, d^*) metrische ruimten. Een $f\colon S \to S^*$ is continu desda $f^{-1}(U)$ open is voor elke open $U \subseteq S^*$.

"$\Leftarrow$": stel dat $f^{-1}(U)$ open is voor alle open U. Neem $s_0 \in S$ en $\epsilon > 0$.

- Kies $U = B\big(f(s_0), \epsilon\big)$. Dan is U open en $s_0 \in f^{-1}(U)$.
- $f^{-1}(U)$ is open, dus er is $\delta > 0$ zodat $B(s_0, \delta) \subseteq f^{-1}(U)$.
- Nu:
  $$d(s, s_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad s \in B(s_0, \delta) \quad \Rightarrow \quad f(s) \in U \quad \Rightarrow \quad d^*\big(f(s), f(s_0)\big) < \epsilon.$$

Continuïteit in topologische zin

Stelling 21.3

Zij (S, d) en (S^*, d^*) metrische ruimten. Een $f\colon S \to S^*$ is continu desda $f^{-1}(U)$ open is voor elke open $U \subseteq S^*$.

"$\Leftarrow$": stel dat $f^{-1}(U)$ open is voor alle open U. Neem $s_0 \in S$ en $\epsilon > 0$.

- Kies $U = B\big(f(s_0), \epsilon\big)$. Dan is U open en $s_0 \in f^{-1}(U)$.
- $f^{-1}(U)$ is open, dus er is $\delta > 0$ zodat $B(s_0, \delta) \subseteq f^{-1}(U)$.
- Nu:
  $$d(s, s_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad s \in B(s_0, \delta) \quad \Rightarrow \quad f(s) \in U \quad \Rightarrow \quad d^*\big(f(s), f(s_0)\big) < \epsilon.$$

"$\Rightarrow$":

Continuïteit in topologische zin

Stelling 21.3

Zij (S, d) en (S^*, d^*) metrische ruimten. Een $f : S \to S^*$ is continu desda $f^{-1}(U)$ open is voor elke open $U \subseteq S^*$.

"$\Leftarrow$": stel dat $f^{-1}(U)$ open is voor alle open U. Neem $s_0 \in S$ en $\epsilon > 0$.

- Kies $U = B\big(f(s_0), \epsilon\big)$. Dan is U open en $s_0 \in f^{-1}(U)$.
- $f^{-1}(U)$ is open, dus er is $\delta > 0$ zodat $B(s_0, \delta) \subseteq f^{-1}(U)$.
- Nu:
  $$d(s, s_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad s \in B(s_0, \delta) \quad \Rightarrow \quad f(s) \in U \quad \Rightarrow \quad d^*\big(f(s), f(s_0)\big) < \epsilon.$$

"$\Rightarrow$": stel dat f continu is.

Continuïteit in topologische zin

Stelling 21.3

Zij (S, d) en (S^*, d^*) metrische ruimten. Een $f\colon S \to S^*$ is continu desda $f^{-1}(U)$ open is voor elke open $U \subseteq S^*$.

"$\Leftarrow$": stel dat $f^{-1}(U)$ open is voor alle open U. Neem $s_0 \in S$ en $\epsilon > 0$.

- Kies $U = B\big(f(s_0), \epsilon\big)$. Dan is U open en $s_0 \in f^{-1}(U)$.
- $f^{-1}(U)$ is open, dus er is $\delta > 0$ zodat $B(s_0, \delta) \subseteq f^{-1}(U)$.
- Nu:
  $d(s, s_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad s \in B(s_0, \delta) \quad \Rightarrow \quad f(s) \in U \quad \Rightarrow \quad d^*\big(f(s), f(s_0)\big) < \epsilon.$

"$\Rightarrow$": stel dat f continu is. Zij $U \subseteq S^*$ open

Continuïteit in topologische zin

Stelling 21.3

Zij (S, d) en (S^*, d^*) metrische ruimten. Een $f\colon S \to S^*$ is continu desda $f^{-1}(U)$ open is voor elke open $U \subseteq S^*$.

"$\Leftarrow$": stel dat $f^{-1}(U)$ open is voor alle open U. Neem $s_0 \in S$ en $\epsilon > 0$.

- Kies $U = B\big(f(s_0), \epsilon\big)$. Dan is U open en $s_0 \in f^{-1}(U)$.
- $f^{-1}(U)$ is open, dus er is $\delta > 0$ zodat $B(s_0, \delta) \subseteq f^{-1}(U)$.
- Nu:
  $$d(s, s_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad s \in B(s_0, \delta) \quad \Rightarrow \quad f(s) \in U \quad \Rightarrow \quad d^*\big(f(s), f(s_0)\big) < \epsilon.$$

"$\Rightarrow$": stel dat f continu is. Zij $U \subseteq S^*$ open en neem $s_0 \in f^{-1}(U)$.

Continuïteit in topologische zin

Stelling 21.3

Zij (S,d) en (S^*,d^*) metrische ruimten. Een $f\colon S \to S^*$ is continu desda $f^{-1}(U)$ open is voor elke open $U \subseteq S^*$.

"$\Leftarrow$": stel dat $f^{-1}(U)$ open is voor alle open U. Neem $s_0 \in S$ en $\epsilon > 0$.

- Kies $U = B\big(f(s_0),\epsilon\big)$. Dan is U open en $s_0 \in f^{-1}(U)$.
- $f^{-1}(U)$ is open, dus er is $\delta > 0$ zodat $B(s_0,\delta) \subseteq f^{-1}(U)$.
- Nu:
  $d(s,s_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad s \in B(s_0,\delta) \quad \Rightarrow \quad f(s) \in U \quad \Rightarrow \quad d^*\big(f(s),f(s_0)\big) < \epsilon.$

"$\Rightarrow$": stel dat f continu is. Zij $U \subseteq S^*$ open en neem $s_0 \in f^{-1}(U)$.

- Omdat U open is en $f(s_0) \in U$

Continuïteit in topologische zin

Stelling 21.3

Zij (S, d) en (S^*, d^*) metrische ruimten. Een $f : S \to S^*$ is continu desda $f^{-1}(U)$ open is voor elke open $U \subseteq S^*$.

"$\Leftarrow$": stel dat $f^{-1}(U)$ open is voor alle open U. Neem $s_0 \in S$ en $\epsilon > 0$.

- Kies $U = B\big(f(s_0), \epsilon\big)$. Dan is U open en $s_0 \in f^{-1}(U)$.
- $f^{-1}(U)$ is open, dus er is $\delta > 0$ zodat $B(s_0, \delta) \subseteq f^{-1}(U)$.
- Nu:
  $d(s, s_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad s \in B(s_0, \delta) \quad \Rightarrow \quad f(s) \in U \quad \Rightarrow \quad d^*\big(f(s), f(s_0)\big) < \epsilon.$

"$\Rightarrow$": stel dat f continu is. Zij $U \subseteq S^*$ open en neem $s_0 \in f^{-1}(U)$.

- Omdat U open is en $f(s_0) \in U$, bestaat er $\epsilon > 0$ zodat $B\big(f(s_0), \epsilon\big) \subseteq U$.

Continuïteit in topologische zin

Stelling 21.3

Zij (S, d) en (S^*, d^*) metrische ruimten. Een $f : S \to S^*$ is continu desda $f^{-1}(U)$ open is voor elke open $U \subseteq S^*$.

"$\Leftarrow$": stel dat $f^{-1}(U)$ open is voor alle open U. Neem $s_0 \in S$ en $\epsilon > 0$.

- Kies $U = B\big(f(s_0), \epsilon\big)$. Dan is U open en $s_0 \in f^{-1}(U)$.
- $f^{-1}(U)$ is open, dus er is $\delta > 0$ zodat $B(s_0, \delta) \subseteq f^{-1}(U)$.
- Nu:
  $d(s, s_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad s \in B(s_0, \delta) \quad \Rightarrow \quad f(s) \in U \quad \Rightarrow \quad d^*\big(f(s), f(s_0)\big) < \epsilon.$

"$\Rightarrow$": stel dat f continu is. Zij $U \subseteq S^*$ open en neem $s_0 \in f^{-1}(U)$.

- Omdat U open is en $f(s_0) \in U$, bestaat er $\epsilon > 0$ zodat $B\big(f(s_0), \epsilon\big) \subseteq U$.
- Er bestaat $\delta > 0$ zodat $d^*\big(f(s), f(s_0)\big) < \epsilon$ als $d(s, s_0) < \delta$.

Continuïteit in topologische zin

Stelling 21.3

Zij (S, d) en (S^*, d^*) metrische ruimten. Een $f\colon S \to S^*$ is continu desda $f^{-1}(U)$ open is voor elke open $U \subseteq S^*$.

"$\Leftarrow$": stel dat $f^{-1}(U)$ open is voor alle open U. Neem $s_0 \in S$ en $\epsilon > 0$.

- Kies $U = B\big(f(s_0), \epsilon\big)$. Dan is U open en $s_0 \in f^{-1}(U)$.
- $f^{-1}(U)$ is open, dus er is $\delta > 0$ zodat $B(s_0, \delta) \subseteq f^{-1}(U)$.
- Nu:
  $$d(s, s_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad s \in B(s_0, \delta) \quad \Rightarrow \quad f(s) \in U \quad \Rightarrow \quad d^*\big(f(s), f(s_0)\big) < \epsilon.$$

"$\Rightarrow$": stel dat f continu is. Zij $U \subseteq S^*$ open en neem $s_0 \in f^{-1}(U)$.

- Omdat U open is en $f(s_0) \in U$, bestaat er $\epsilon > 0$ zodat $B\big(f(s_0), \epsilon\big) \subseteq U$.
- Er bestaat $\delta > 0$ zodat $d^*\big(f(s), f(s_0)\big) < \epsilon$ als $d(s, s_0) < \delta$.
- Nu: $s \in B(s_0, \delta)$

Continuïteit in topologische zin

Stelling 21.3

Zij (S, d) en (S^*, d^*) metrische ruimten. Een $f\colon S \to S^*$ is continu desda $f^{-1}(U)$ open is voor elke open $U \subseteq S^*$.

"$\Leftarrow$": stel dat $f^{-1}(U)$ open is voor alle open U. Neem $s_0 \in S$ en $\epsilon > 0$.

- Kies $U = B\big(f(s_0), \epsilon\big)$. Dan is U open en $s_0 \in f^{-1}(U)$.
- $f^{-1}(U)$ is open, dus er is $\delta > 0$ zodat $B(s_0, \delta) \subseteq f^{-1}(U)$.
- Nu:
  $d(s, s_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad s \in B(s_0, \delta) \quad \Rightarrow \quad f(s) \in U \quad \Rightarrow \quad d^*\big(f(s), f(s_0)\big) < \epsilon.$

"$\Rightarrow$": stel dat f continu is. Zij $U \subseteq S^*$ open en neem $s_0 \in f^{-1}(U)$.

- Omdat U open is en $f(s_0) \in U$, bestaat er $\epsilon > 0$ zodat $B\big(f(s_0), \epsilon\big) \subseteq U$.
- Er bestaat $\delta > 0$ zodat $d^*\big(f(s), f(s_0)\big) < \epsilon$ als $d(s, s_0) < \delta$.
- Nu: $s \in B(s_0, \delta) \quad \Rightarrow \quad d^*\big(f(s), f(s_0)\big) < \epsilon$

Continuïteit in topologische zin

Stelling 21.3

Zij (S,d) en (S^*,d^*) metrische ruimten. Een $f\colon S \to S^*$ is continu desda $f^{-1}(U)$ open is voor elke open $U \subseteq S^*$.

"$\Leftarrow$": stel dat $f^{-1}(U)$ open is voor alle open U. Neem $s_0 \in S$ en $\epsilon > 0$.

- Kies $U = B\big(f(s_0),\epsilon\big)$. Dan is U open en $s_0 \in f^{-1}(U)$.
- $f^{-1}(U)$ is open, dus er is $\delta > 0$ zodat $B(s_0,\delta) \subseteq f^{-1}(U)$.
- Nu:
  $$d(s,s_0) < \delta \quad\Rightarrow\quad s \in B(s_0,\delta) \quad\Rightarrow\quad f(s) \in U \quad\Rightarrow\quad d^*\big(f(s),f(s_0)\big) < \epsilon.$$

"$\Rightarrow$": stel dat f continu is. Zij $U \subseteq S^*$ open en neem $s_0 \in f^{-1}(U)$.

- Omdat U open is en $f(s_0) \in U$, bestaat er $\epsilon > 0$ zodat $B\big(f(s_0),\epsilon\big) \subseteq U$.
- Er bestaat $\delta > 0$ zodat $d^*\big(f(s),f(s_0)\big) < \epsilon$ als $d(s,s_0) < \delta$.
- Nu: $s \in B(s_0,\delta) \quad\Rightarrow\quad d^*\big(f(s),f(s_0)\big) < \epsilon \quad\Rightarrow\quad f(s) \in B\big(f(s_0),\epsilon\big)$

Continuïteit in topologische zin

Stelling 21.3

Zij (S, d) en (S^*, d^*) metrische ruimten. Een $f\colon S \to S^*$ is continu desda $f^{-1}(U)$ open is voor elke open $U \subseteq S^*$.

"$\Leftarrow$": stel dat $f^{-1}(U)$ open is voor alle open U. Neem $s_0 \in S$ en $\epsilon > 0$.

- Kies $U = B\big(f(s_0), \epsilon\big)$. Dan is U open en $s_0 \in f^{-1}(U)$.
- $f^{-1}(U)$ is open, dus er is $\delta > 0$ zodat $B(s_0, \delta) \subseteq f^{-1}(U)$.
- Nu:
  $d(s, s_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad s \in B(s_0, \delta) \quad \Rightarrow \quad f(s) \in U \quad \Rightarrow \quad d^*\big(f(s), f(s_0)\big) < \epsilon.$

"$\Rightarrow$": stel dat f continu is. Zij $U \subseteq S^*$ open en neem $s_0 \in f^{-1}(U)$.

- Omdat U open is en $f(s_0) \in U$, bestaat er $\epsilon > 0$ zodat $B\big(f(s_0), \epsilon\big) \subseteq U$.
- Er bestaat $\delta > 0$ zodat $d^*\big(f(s), f(s_0)\big) < \epsilon$ als $d(s, s_0) < \delta$.
- Nu: $s \in B(s_0, \delta) \quad \Rightarrow \quad d^*\big(f(s), f(s_0)\big) < \epsilon \quad \Rightarrow \quad f(s) \in B\big(f(s_0), \epsilon\big) \subseteq U$,

Continuïteit in topologische zin

Stelling 21.3

Zij (S,d) en (S^*,d^*) metrische ruimten. Een $f\colon S\to S^*$ is continu desda $f^{-1}(U)$ open is voor elke open $U\subseteq S^*$.

"$\Leftarrow$": stel dat $f^{-1}(U)$ open is voor alle open U. Neem $s_0\in S$ en $\epsilon>0$.

- Kies $U=B\big(f(s_0),\epsilon\big)$. Dan is U open en $s_0\in f^{-1}(U)$.
- $f^{-1}(U)$ is open, dus er is $\delta>0$ zodat $B(s_0,\delta)\subseteq f^{-1}(U)$.
- Nu:
  $d(s,s_0)<\delta \quad\Rightarrow\quad s\in B(s_0,\delta) \quad\Rightarrow\quad f(s)\in U \quad\Rightarrow\quad d^*\big(f(s),f(s_0)\big)<\epsilon.$

"$\Rightarrow$": stel dat f continu is. Zij $U\subseteq S^*$ open en neem $s_0\in f^{-1}(U)$.

- Omdat U open is en $f(s_0)\in U$, bestaat er $\epsilon>0$ zodat $B\big(f(s_0),\epsilon\big)\subseteq U$.
- Er bestaat $\delta>0$ zodat $d^*\big(f(s),f(s_0)\big)<\epsilon$ als $d(s,s_0)<\delta$.
- Nu: $s\in B(s_0,\delta) \quad\Rightarrow\quad d^*\big(f(s),f(s_0)\big)<\epsilon \quad\Rightarrow\quad f(s)\in B\big(f(s_0),\epsilon\big)\subseteq U$,
- Dus $s\in f^{-1}(U)$

Continuïteit in topologische zin

Stelling 21.3

Zij (S, d) en (S^*, d^*) metrische ruimten. Een $f : S \to S^*$ is continu desda $f^{-1}(U)$ open is voor elke open $U \subseteq S^*$.

"$\Leftarrow$": stel dat $f^{-1}(U)$ open is voor alle open U. Neem $s_0 \in S$ en $\epsilon > 0$.

- Kies $U = B\big(f(s_0), \epsilon\big)$. Dan is U open en $s_0 \in f^{-1}(U)$.
- $f^{-1}(U)$ is open, dus er is $\delta > 0$ zodat $B(s_0, \delta) \subseteq f^{-1}(U)$.
- Nu:
  $$d(s, s_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad s \in B(s_0, \delta) \quad \Rightarrow \quad f(s) \in U \quad \Rightarrow \quad d^*\big(f(s), f(s_0)\big) < \epsilon.$$

"$\Rightarrow$": stel dat f continu is. Zij $U \subseteq S^*$ open en neem $s_0 \in f^{-1}(U)$.

- Omdat U open is en $f(s_0) \in U$, bestaat er $\epsilon > 0$ zodat $B\big(f(s_0), \epsilon\big) \subseteq U$.
- Er bestaat $\delta > 0$ zodat $d^*\big(f(s), f(s_0)\big) < \epsilon$ als $d(s, s_0) < \delta$.
- Nu: $s \in B(s_0, \delta) \quad \Rightarrow \quad d^*\big(f(s), f(s_0)\big) < \epsilon \quad \Rightarrow \quad f(s) \in B\big(f(s_0), \epsilon\big) \subseteq U$,
- Dus $s \in f^{-1}(U)$ voor elke $s \in B(s_0, \delta)$.

Continuïteit in topologische zin

Stelling 21.3

Zij (S, d) en (S^*, d^*) metrische ruimten. Een $f\colon S \to S^*$ is continu desda $f^{-1}(U)$ open is voor elke open $U \subseteq S^*$.

"$\Leftarrow$": stel dat $f^{-1}(U)$ open is voor alle open U. Neem $s_0 \in S$ en $\epsilon > 0$.

- Kies $U = B\big(f(s_0), \epsilon\big)$. Dan is U open en $s_0 \in f^{-1}(U)$.
- $f^{-1}(U)$ is open, dus er is $\delta > 0$ zodat $B(s_0, \delta) \subseteq f^{-1}(U)$.
- Nu:
  $d(s, s_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad s \in B(s_0, \delta) \quad \Rightarrow \quad f(s) \in U \quad \Rightarrow \quad d^*\big(f(s), f(s_0)\big) < \epsilon.$

"$\Rightarrow$": stel dat f continu is. Zij $U \subseteq S^*$ open en neem $s_0 \in f^{-1}(U)$.

- Omdat U open is en $f(s_0) \in U$, bestaat er $\epsilon > 0$ zodat $B\big(f(s_0), \epsilon\big) \subseteq U$.
- Er bestaat $\delta > 0$ zodat $d^*\big(f(s), f(s_0)\big) < \epsilon$ als $d(s, s_0) < \delta$.
- Nu: $s \in B(s_0, \delta) \quad \Rightarrow \quad d^*\big(f(s), f(s_0)\big) < \epsilon \quad \Rightarrow \quad f(s) \in B\big(f(s_0), \epsilon\big) \subseteq U$,
- Dus $s \in f^{-1}(U)$ voor elke $s \in B(s_0, \delta)$.
- We zien $B(s_0, \delta) \subseteq f^{-1}(U)$

Continuïteit in topologische zin

Stelling 21.3

Zij (S,d) en (S^*,d^*) metrische ruimten. Een $f\colon S \to S^*$ is continu desda $f^{-1}(U)$ open is voor elke open $U \subseteq S^*$.

"$\Leftarrow$": stel dat $f^{-1}(U)$ open is voor alle open U. Neem $s_0 \in S$ en $\epsilon > 0$.

- Kies $U = B\big(f(s_0),\epsilon\big)$. Dan is U open en $s_0 \in f^{-1}(U)$.
- $f^{-1}(U)$ is open, dus er is $\delta > 0$ zodat $B(s_0,\delta) \subseteq f^{-1}(U)$.
- Nu:
  $d(s,s_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad s \in B(s_0,\delta) \quad \Rightarrow \quad f(s) \in U \quad \Rightarrow \quad d^*\big(f(s),f(s_0)\big) < \epsilon.$

"$\Rightarrow$": stel dat f continu is. Zij $U \subseteq S^*$ open en neem $s_0 \in f^{-1}(U)$.

- Omdat U open is en $f(s_0) \in U$, bestaat er $\epsilon > 0$ zodat $B\big(f(s_0),\epsilon\big) \subseteq U$.
- Er bestaat $\delta > 0$ zodat $d^*\big(f(s),f(s_0)\big) < \epsilon$ als $d(s,s_0) < \delta$.
- Nu: $s \in B(s_0,\delta) \quad \Rightarrow \quad d^*\big(f(s),f(s_0)\big) < \epsilon \quad \Rightarrow \quad f(s) \in B\big(f(s_0),\epsilon\big) \subseteq U$,
- Dus $s \in f^{-1}(U)$ voor elke $s \in B(s_0,\delta)$.
- We zien $B(s_0,\delta) \subseteq f^{-1}(U)$, dus s_0 is inwendig.

Continuïteit in topologische zin

Stelling 21.3

Zij (S, d) en (S^*, d^*) metrische ruimten. Een $f : S \to S^*$ is continu desda $f^{-1}(U)$ open is voor elke open $U \subseteq S^*$.

"$\Leftarrow$": stel dat $f^{-1}(U)$ open is voor alle open U. Neem $s_0 \in S$ en $\epsilon > 0$.

- Kies $U = B\big(f(s_0), \epsilon\big)$. Dan is U open en $s_0 \in f^{-1}(U)$.
- $f^{-1}(U)$ is open, dus er is $\delta > 0$ zodat $B(s_0, \delta) \subseteq f^{-1}(U)$.
- Nu:
  $d(s, s_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad s \in B(s_0, \delta) \quad \Rightarrow \quad f(s) \in U \quad \Rightarrow \quad d^*\big(f(s), f(s_0)\big) < \epsilon.$

"$\Rightarrow$": stel dat f continu is. Zij $U \subseteq S^*$ open en neem $s_0 \in f^{-1}(U)$.

- Omdat U open is en $f(s_0) \in U$, bestaat er $\epsilon > 0$ zodat $B\big(f(s_0), \epsilon\big) \subseteq U$.
- Er bestaat $\delta > 0$ zodat $d^*\big(f(s), f(s_0)\big) < \epsilon$ als $d(s, s_0) < \delta$.
- Nu: $s \in B(s_0, \delta) \quad \Rightarrow \quad d^*\big(f(s), f(s_0)\big) < \epsilon \quad \Rightarrow \quad f(s) \in B\big(f(s_0), \epsilon\big) \subseteq U$,
- Dus $s \in f^{-1}(U)$ voor elke $s \in B(s_0, \delta)$.
- We zien $B(s_0, \delta) \subseteq f^{-1}(U)$, dus s_0 is inwendig. Dit geldt voor elke $s_0 \in f^{-1}(U)$

Continuïteit in topologische zin

Stelling 21.3

Zij (S, d) en (S^*, d^*) metrische ruimten. Een $f\colon S \to S^*$ is continu desda $f^{-1}(U)$ open is voor elke open $U \subseteq S^*$.

"$\Leftarrow$": stel dat $f^{-1}(U)$ open is voor alle open U. Neem $s_0 \in S$ en $\epsilon > 0$.

- Kies $U = B\big(f(s_0), \epsilon\big)$. Dan is U open en $s_0 \in f^{-1}(U)$.
- $f^{-1}(U)$ is open, dus er is $\delta > 0$ zodat $B(s_0, \delta) \subseteq f^{-1}(U)$.
- Nu:
  $d(s, s_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad s \in B(s_0, \delta) \quad \Rightarrow \quad f(s) \in U \quad \Rightarrow \quad d^*\big(f(s), f(s_0)\big) < \epsilon.$

"$\Rightarrow$": stel dat f continu is. Zij $U \subseteq S^*$ open en neem $s_0 \in f^{-1}(U)$.

- Omdat U open is en $f(s_0) \in U$, bestaat er $\epsilon > 0$ zodat $B\big(f(s_0), \epsilon\big) \subseteq U$.
- Er bestaat $\delta > 0$ zodat $d^*\big(f(s), f(s_0)\big) < \epsilon$ als $d(s, s_0) < \delta$.
- Nu: $s \in B(s_0, \delta) \quad \Rightarrow \quad d^*\big(f(s), f(s_0)\big) < \epsilon \quad \Rightarrow \quad f(s) \in B\big(f(s_0), \epsilon\big) \subseteq U$,
- Dus $s \in f^{-1}(U)$ voor elke $s \in B(s_0, \delta)$.
- We zien $B(s_0, \delta) \subseteq f^{-1}(U)$, dus s_0 is inwendig. Dit geldt voor elke $s_0 \in f^{-1}(U)$, dus deze verzameling is open.

Compactheid en continuïteit

Definitie

Zij (S, d) een metrische ruimte. Een verzameling $F \subseteq S$ heet compact als elke overdekking een eindige deeloverdekking heeft: voor elke collectie $\{U_\alpha, \alpha \in A\}$ van open verzamelingen zodat $F \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, bestaan er $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ zodat $F \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$.

Compactheid en continuïteit

Definitie

Zij (S, d) een metrische ruimte. Een verzameling $F \subseteq S$ heet compact als elke overdekking een eindige deeloverdekking heeft: voor elke collectie $\{U_\alpha, \alpha \in A\}$ van open verzamelingen zodat $F \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, bestaan er $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ zodat $F \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$.

Stelling 21.4 (i)

Zij $f\colon S \to S^*$ een continue afbeelding en $E \subseteq S$ compact. Dan is $f(E)$ ook compact.

Compactheid en continuïteit

Definitie

Zij (S, d) een metrische ruimte. Een verzameling $F \subseteq S$ heet compact als elke overdekking een eindige deeloverdekking heeft: voor elke collectie $\{U_\alpha, \alpha \in A\}$ van open verzamelingen zodat $F \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, bestaan er $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ zodat $F \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$.

Stelling 21.4 (i)

Zij $f\colon S \to S^*$ een continue afbeelding en $E \subseteq S$ compact. Dan is $f(E)$ ook compact.

Bewijs:

Compactheid en continuïteit

Definitie

Zij (S, d) een metrische ruimte. Een verzameling $F \subseteq S$ heet compact als elke overdekking een eindige deeloverdekking heeft: voor elke collectie $\{U_\alpha, \alpha \in A\}$ van open verzamelingen zodat $F \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, bestaan er $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ zodat $F \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i}$.

Stelling 21.4 (i)

Zij $f\colon S \to S^*$ een continue afbeelding en $E \subseteq S$ compact. Dan is $f(E)$ ook compact.

Bewijs:

- Neem een open overdekking $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ van $f(E)$.

Compactheid en continuïteit

Definitie

Zij (S, d) een metrische ruimte. Een verzameling $F \subseteq S$ heet compact als elke overdekking een eindige deeloverdekking heeft: voor elke collectie $\{U_\alpha, \alpha \in A\}$ van open verzamelingen zodat $F \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, bestaan er $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ zodat $F \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$.

Stelling 21.4 (i)

Zij $f \colon S \to S^*$ een continue afbeelding en $E \subseteq S$ compact. Dan is $f(E)$ ook compact.

Bewijs:

- Neem een open overdekking $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ van $f(E)$.
- Dan zijn de verzamelingen $f^{-1}(U_\alpha)$

Compactheid en continuïteit

Definitie

Zij (S, d) een metrische ruimte. Een verzameling $F \subseteq S$ heet compact als elke overdekking een eindige deeloverdekking heeft: voor elke collectie $\{U_\alpha, \alpha \in A\}$ van open verzamelingen zodat $F \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, bestaan er $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ zodat $F \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$.

Stelling 21.4 (i)

Zij $f \colon S \to S^*$ een continue afbeelding en $E \subseteq S$ compact. Dan is $f(E)$ ook compact.

Bewijs:

- Neem een open overdekking $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ van $f(E)$.
- Dan zijn de verzamelingen $f^{-1}(U_\alpha)$ open

Compactheid en continuïteit

Definitie

Zij (S,d) een metrische ruimte. Een verzameling $F \subseteq S$ heet compact als elke overdekking een eindige deeloverdekking heeft: voor elke collectie $\{U_\alpha, \alpha \in A\}$ van open verzamelingen zodat $F \subseteq \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$, bestaan er $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ zodat $F \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i}$.

Stelling 21.4 (i)

Zij $f\colon S \to S^*$ een continue afbeelding en $E \subseteq S$ compact. Dan is $f(E)$ ook compact.

Bewijs:

- Neem een open overdekking $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ van $f(E)$.
- Dan zijn de verzamelingen $f^{-1}(U_\alpha)$ open en geldt $E \subseteq \bigcup_{\alpha\in A} f^{-1}(U_\alpha)$.

Compactheid en continuïteit

Definitie

Zij (S, d) een metrische ruimte. Een verzameling $F \subseteq S$ heet compact als elke overdekking een eindige deeloverdekking heeft: voor elke collectie $\{U_\alpha, \alpha \in A\}$ van open verzamelingen zodat $F \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, bestaan er $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ zodat $F \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i}$.

Stelling 21.4 (i)

Zij $f\colon S \to S^*$ een continue afbeelding en $E \subseteq S$ compact. Dan is $f(E)$ ook compact.

Bewijs:

- Neem een open overdekking $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ van $f(E)$.
- Dan zijn de verzamelingen $f^{-1}(U_\alpha)$ open en geldt $E \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} f^{-1}(U_\alpha)$.
- Dus bestaan er $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ zodat $E \subseteq \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(U_{\alpha_i})$.

Compactheid en continuïteit

Definitie

Zij (S, d) een metrische ruimte. Een verzameling $F \subseteq S$ heet compact als elke overdekking een eindige deeloverdekking heeft: voor elke collectie $\{U_\alpha, \alpha \in A\}$ van open verzamelingen zodat $F \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, bestaan er $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ zodat $F \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i}$.

Stelling 21.4 (i)

Zij $f \colon S \to S^*$ een continue afbeelding en $E \subseteq S$ compact. Dan is $f(E)$ ook compact.

Bewijs:

- Neem een open overdekking $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ van $f(E)$.
- Dan zijn de verzamelingen $f^{-1}(U_\alpha)$ open en geldt $E \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} f^{-1}(U_\alpha)$.
- Dus bestaan er $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ zodat $E \subseteq \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(U_{\alpha_i})$.
- Maar dan geldt ook $f(E) \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i}$.

Compactheid en continuïteit

Definitie

Zij (S, d) een metrische ruimte. Een verzameling $F \subseteq S$ heet compact als elke overdekking een eindige deeloverdekking heeft: voor elke collectie $\{U_\alpha, \alpha \in A\}$ van open verzamelingen zodat $F \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, bestaan er $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ zodat $F \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i}$.

Stelling 21.4 (i)

Zij $f : S \to S^*$ een continue afbeelding en $E \subseteq S$ compact. Dan is $f(E)$ ook compact.

Bewijs:

- Neem een open overdekking $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ van $f(E)$.
- Dan zijn de verzamelingen $f^{-1}(U_\alpha)$ open en geldt $E \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} f^{-1}(U_\alpha)$.
- Dus bestaan er $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ zodat $E \subseteq \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(U_{\alpha_i})$.
- Maar dan geldt ook $f(E) \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i}$.
- Dus de overdekking heeft een eindige deeloverdekking.

Compactheid en continuïteit

Heine-Borel

In $\mathbb{R}^k$ is F compact desda F gesloten en begrensd is.

Stelling 21.4 (i)

Zij $f : S \to S^*$ een continue afbeelding en $E \subseteq S$ compact. Dan is $f(E)$ ook compact.

Compactheid en continuïteit

Heine-Borel

In $\mathbb{R}^k$ is F compact desda F gesloten en begrensd is.

Stelling 21.4 (i)

Zij $f: S \to S^*$ een continue afbeelding en $E \subseteq S$ compact. Dan is $f(E)$ ook compact.

Gevolg

Zij (S, d) een metrische ruimte en $f: S \to \mathbb{R}$ continu. Stel dat $E \subseteq S$ compact is. Dan

1. f is begrensd op E.

Compactheid en continuïteit

Heine-Borel

In $\mathbb{R}^k$ is F compact desda F gesloten en begrensd is.

Stelling 21.4 (i)

Zij $f\colon S \to S^*$ een continue afbeelding en $E \subseteq S$ compact. Dan is $f(E)$ ook compact.

Gevolg

Zij (S, d) een metrische ruimte en $f\colon S \to \mathbb{R}$ continu. Stel dat $E \subseteq S$ compact is. Dan

1. f is begrensd op E.
2. f neemt een maximum en minimum aan op E.

Compactheid en continuïteit

Heine-Borel

In $\mathbb{R}^k$ is F compact desda F gesloten en begrensd is.

Stelling 21.4 (i)

Zij $f : S \to S^*$ een continue afbeelding en $E \subseteq S$ compact. Dan is $f(E)$ ook compact.

Gevolg

Zij (S, d) een metrische ruimte en $f : S \to \mathbb{R}$ continu. Stel dat $E \subseteq S$ compact is. Dan

1. f is begrensd op E.
2. f neemt een maximum en minimum aan op E.

Bewijs:

Compactheid en continuïteit

Heine-Borel

In $\mathbb{R}^k$ is F compact desda F gesloten en begrensd is.

Stelling 21.4 (i)

Zij $f\colon S \to S^*$ een continue afbeelding en $E \subseteq S$ compact. Dan is $f(E)$ ook compact.

Gevolg

Zij (S, d) een metrische ruimte en $f\colon S \to \mathbb{R}$ continu. Stel dat $E \subseteq S$ compact is. Dan

1. f is begrensd op E.
2. f neemt een maximum en minimum aan op E.

Bewijs:

1. Volgt direct uit de compactheid van $f(E)$ en Heine-Borel.

Compactheid en continuïteit

Heine-Borel

In $\mathbb{R}^k$ is F compact desda F gesloten en begrensd is.

Stelling 21.4 (i)

Zij $f\colon S \to S^*$ een continue afbeelding en $E \subseteq S$ compact. Dan is $f(E)$ ook compact.

Gevolg

Zij (S, d) een metrische ruimte en $f\colon S \to \mathbb{R}$ continu. Stel dat $E \subseteq S$ compact is. Dan

1. f is begrensd op E.
2. f neemt een maximum en minimum aan op E.

Bewijs:

1. Volgt direct uit de compactheid van $f(E)$ en Heine-Borel.
2. $f(E)$ is gesloten

Compactheid en continuïteit

Heine-Borel

In $\mathbb{R}^k$ is F compact desda F gesloten en begrensd is.

Stelling 21.4 (i)

Zij $f\colon S \to S^*$ een continue afbeelding en $E \subseteq S$ compact. Dan is $f(E)$ ook compact.

Gevolg

Zij (S, d) een metrische ruimte en $f\colon S \to \mathbb{R}$ continu. Stel dat $E \subseteq S$ compact is. Dan

1. f is begrensd op E.
2. f neemt een maximum en minimum aan op E.

Bewijs:

1. Volgt direct uit de compactheid van $f(E)$ en Heine-Borel.
2. $f(E)$ is gesloten, dus bevat zijn supremum U en infimum L.

Compactheid en continuïteit

Heine-Borel

In $\mathbb{R}^k$ is F compact desda F gesloten en begrensd is.

Stelling 21.4 (i)

Zij $f: S \to S^*$ een continue afbeelding en $E \subseteq S$ compact. Dan is $f(E)$ ook compact.

Gevolg

Zij (S, d) een metrische ruimte en $f: S \to \mathbb{R}$ continu. Stel dat $E \subseteq S$ compact is. Dan

1. f is begrensd op E.
2. f neemt een maximum en minimum aan op E.

Bewijs:

1. Volgt direct uit de compactheid van $f(E)$ en Heine-Borel.
2. $f(E)$ is gesloten, dus bevat zijn supremum U en infimum L. Deze zijn eindig vanwege de begrensdheid van $f(E)$.

Compactheid en continuïteit

Heine-Borel

In $\mathbb{R}^k$ is F compact desda F gesloten en begrensd is.

Stelling 21.4 (i)

Zij $f : S \to S^*$ een continue afbeelding en $E \subseteq S$ compact. Dan is $f(E)$ ook compact.

Gevolg

Zij (S, d) een metrische ruimte en $f : S \to \mathbb{R}$ continu. Stel dat $E \subseteq S$ compact is. Dan

1. f is begrensd op E.
2. f neemt een maximum en minimum aan op E.

Bewijs:

1. Volgt direct uit de compactheid van $f(E)$ en Heine-Borel.
2. $f(E)$ is gesloten, dus bevat zijn supremum U en infimum L. Deze zijn eindig vanwege de begrensdheid van $f(E)$. Dan is U het maximum van f op E en L het minimum.

Compactheid en uniforme continuïteit

Definitie

Een functie $S \to S^*$ heet uniform continu als voor elke $\epsilon > 0$ er een $\delta > 0$ is zodat $d\big(f(s), f(t)\big) < \epsilon$ als $d(s, t) < \delta$.

Compactheid en uniforme continuïteit

Definitie

Een functie $S \to S^*$ heet uniform continu als voor elke $\epsilon > 0$ er een $\delta > 0$ is zodat $d\big(f(s), f(t)\big) < \epsilon$ als $d(s,t) < \delta$.

Stelling 21.4 (ii)

Zij $f : S \to S^*$ continu en $E \subseteq S$ compact. Dan is f uniform continu op E.

Compactheid en uniforme continuïteit

Definitie

Een functie $S \to S^*$ heet uniform continu als voor elke $\epsilon > 0$ er een $\delta > 0$ is zodat $d\big(f(s), f(t)\big) < \epsilon$ als $d(s,t) < \delta$.

Stelling 21.4 (ii)

Zij $f\colon S \to S^*$ continu en $E \subseteq S$ compact. Dan is f uniform continu op E.

Bewijs:

Compactheid en uniforme continuïteit

Definitie

Een functie $S \to S^*$ heet uniform continu als voor elke $\epsilon > 0$ er een $\delta > 0$ is zodat $d\big(f(s), f(t)\big) < \epsilon$ als $d(s,t) < \delta$.

Stelling 21.4 (ii)

Zij $f\colon S \to S^*$ continu en $E \subseteq S$ compact. Dan is f uniform continu op E.

Bewijs:

- Voor elke $s \in E$ is er een δ_s zodat $d^*\big(f(s), f(t)\big) < \epsilon$ als $d(s,t) < \delta_s$.

Compactheid en uniforme continuïteit

Definitie

Een functie $S \to S^*$ heet uniform continu als voor elke $\epsilon > 0$ er een $\delta > 0$ is zodat $d\big(f(s), f(t)\big) < \epsilon$ als $d(s,t) < \delta$.

Stelling 21.4 (ii)

Zij $f\colon S \to S^*$ continu en $E \subseteq S$ compact. Dan is f uniform continu op E.

Bewijs:

- Voor elke $s \in E$ is er een δ_s zodat $d^*\big(f(s), f(t)\big) < \epsilon$ als $d(s,t) < \delta_s$.
- De collectie $\left\{B\left(s, \frac{1}{2}\delta_s\right) : s \in E\right\}$

Compactheid en uniforme continuïteit

Definitie

Een functie $S \to S^*$ heet uniform continu als voor elke $\epsilon > 0$ er een $\delta > 0$ is zodat $d\big(f(s), f(t)\big) < \epsilon$ als $d(s,t) < \delta$.

Stelling 21.4 (ii)

Zij $f : S \to S^*$ continu en $E \subseteq S$ compact. Dan is f uniform continu op E.

Bewijs:

- Voor elke $s \in E$ is er een δ_s zodat $d^*\big(f(s), f(t)\big) < \epsilon$ als $d(s,t) < \delta_s$.
- De collectie $\left\{B\left(s, \frac{1}{2}\delta_s\right) : s \in E\right\}$ vormt een open overdekking van E.

Compactheid en uniforme continuïteit

Definitie

Een functie $S \to S^*$ heet uniform continu als voor elke $\epsilon > 0$ er een $\delta > 0$ is zodat $d\big(f(s), f(t)\big) < \epsilon$ als $d(s,t) < \delta$.

Stelling 21.4 (ii)

Zij $f\colon S \to S^*$ continu en $E \subseteq S$ compact. Dan is f uniform continu op E.

Bewijs:

- Voor elke $s \in E$ is er een δ_s zodat $d^*\big(f(s), f(t)\big) < \epsilon$ als $d(s,t) < \delta_s$.
- De collectie $\left\{B\left(s, \frac{1}{2}\delta_s\right) : s \in E\right\}$ vormt een open overdekking van E.
- Er zijn dus $s_1, \ldots, s_n$ zodat $E \subseteq B\left(s_1, \frac{1}{2}\delta_{s_1}\right) \cup \cdots \cup B\left(s_n, \frac{1}{2}\delta_{s_n}\right)$.

Compactheid en uniforme continuïteit

Definitie

Een functie $S \to S^*$ heet uniform continu als voor elke $\epsilon > 0$ er een $\delta > 0$ is zodat $d\big(f(s), f(t)\big) < \epsilon$ als $d(s,t) < \delta$.

Stelling 21.4 (ii)

Zij $f\colon S \to S^*$ continu en $E \subseteq S$ compact. Dan is f uniform continu op E.

Bewijs:

- Voor elke $s \in E$ is er een δ_s zodat $d^*\big(f(s), f(t)\big) < \epsilon$ als $d(s,t) < \delta_s$.
- De collectie $\left\{B\left(s, \frac{1}{2}\delta_s\right) : s \in E\right\}$ vormt een open overdekking van E.
- Er zijn dus $s_1, \ldots, s_n$ zodat $E \subseteq B\left(s_1, \frac{1}{2}\delta_{s_1}\right) \cup \cdots \cup B\left(s_n, \frac{1}{2}\delta_{s_n}\right)$.
- Laat $\delta = \frac{1}{2}\min(\delta_{s_1}, \ldots, \delta s_n)$

Compactheid en uniforme continuïteit

Definitie

Een functie $S \to S^*$ heet uniform continu als voor elke $\epsilon > 0$ er een $\delta > 0$ is zodat $d\big(f(s), f(t)\big) < \epsilon$ als $d(s,t) < \delta$.

Stelling 21.4 (ii)

Zij $f \colon S \to S^*$ continu en $E \subseteq S$ compact. Dan is f uniform continu op E.

Bewijs:

- Voor elke $s \in E$ is er een δ_s zodat $d^*\big(f(s), f(t)\big) < \epsilon$ als $d(s,t) < \delta_s$.
- De collectie $\left\{B\left(s, \frac{1}{2}\delta_s\right) : s \in E\right\}$ vormt een open overdekking van E.
- Er zijn dus $s_1, \ldots, s_n$ zodat $E \subseteq B\left(s_1, \frac{1}{2}\delta_{s_1}\right) \cup \cdots \cup B\left(s_n, \frac{1}{2}\delta_{s_n}\right)$.
- Laat $\delta = \frac{1}{2}\min(\delta_{s_1}, \ldots, \delta s_n)$ en kies $s, t \in E$ met $d(s,t) < \delta$.

Compactheid en uniforme continuïteit

Definitie

Een functie $S \to S^*$ heet uniform continu als voor elke $\epsilon > 0$ er een $\delta > 0$ is zodat $d\big(f(s), f(t)\big) < \epsilon$ als $d(s,t) < \delta$.

Stelling 21.4 (ii)

Zij $f\colon S \to S^*$ continu en $E \subseteq S$ compact. Dan is f uniform continu op E.

Bewijs:

- Voor elke $s \in E$ is er een δ_s zodat $d^*\big(f(s), f(t)\big) < \epsilon$ als $d(s,t) < \delta_s$.
- De collectie $\left\{B\left(s, \frac{1}{2}\delta_s\right) : s \in E\right\}$ vormt een open overdekking van E.
- Er zijn dus $s_1, \ldots, s_n$ zodat $E \subseteq B\left(s_1, \frac{1}{2}\delta_{s_1}\right) \cup \cdots \cup B\left(s_n, \frac{1}{2}\delta_{s_n}\right)$.
- Laat $\delta = \frac{1}{2}\min(\delta_{s_1}, \ldots, \delta s_n)$ en kies $s, t \in E$ met $d(s,t) < \delta$.
- Er bestaat k zodat $s \in B\left(s_k, \frac{1}{2}\delta_{s_k}\right)$

Compactheid en uniforme continuïteit

Definitie

Een functie $S \to S^*$ heet uniform continu als voor elke $\epsilon > 0$ er een $\delta > 0$ is zodat $d\big(f(s), f(t)\big) < \epsilon$ als $d(s,t) < \delta$.

Stelling 21.4 (ii)

Zij $f\colon S \to S^*$ continu en $E \subseteq S$ compact. Dan is f uniform continu op E.

Bewijs:

- Voor elke $s \in E$ is er een δ_s zodat $d^*\big(f(s), f(t)\big) < \epsilon$ als $d(s,t) < \delta_s$.
- De collectie $\left\{B\left(s, \frac{1}{2}\delta_s\right) : s \in E\right\}$ vormt een open overdekking van E.
- Er zijn dus $s_1, \ldots, s_n$ zodat $E \subseteq B\left(s_1, \frac{1}{2}\delta_{s_1}\right) \cup \cdots \cup B\left(s_n, \frac{1}{2}\delta_{s_n}\right)$.
- Laat $\delta = \frac{1}{2}\min(\delta_{s_1}, \ldots, \delta s_n)$ en kies $s, t \in E$ met $d(s,t) < \delta$.
- Er bestaat k zodat $s \in B\left(s_k, \frac{1}{2}\delta_{s_k}\right)$, dus $d(s, s_k) < \frac{1}{2}\delta_{s_k}$.

Compactheid en uniforme continuïteit

Definitie

Een functie $S \to S^*$ heet uniform continu als voor elke $\epsilon > 0$ er een $\delta > 0$ is zodat $d\big(f(s), f(t)\big) < \epsilon$ als $d(s,t) < \delta$.

Stelling 21.4 (ii)

Zij $f : S \to S^*$ continu en $E \subseteq S$ compact. Dan is f uniform continu op E.

Bewijs:

- Voor elke $s \in E$ is er een δ_s zodat $d^*\big(f(s), f(t)\big) < \epsilon$ als $d(s,t) < \delta_s$.
- De collectie $\left\{B\left(s, \frac{1}{2}\delta_s\right) : s \in E\right\}$ vormt een open overdekking van E.
- Er zijn dus $s_1, \ldots, s_n$ zodat $E \subseteq B\left(s_1, \frac{1}{2}\delta_{s_1}\right) \cup \cdots \cup B\left(s_n, \frac{1}{2}\delta_{s_n}\right)$.
- Laat $\delta = \frac{1}{2}\min(\delta_{s_1}, \ldots, \delta s_n)$ en kies $s, t \in E$ met $d(s,t) < \delta$.
- Er bestaat k zodat $s \in B\left(s_k, \frac{1}{2}\delta_{s_k}\right)$, dus $d(s, s_k) < \frac{1}{2}\delta_{s_k}$.
- Dan is $d(s_k, t)$

Compactheid en uniforme continuïteit

Definitie

Een functie $S \to S^*$ heet uniform continu als voor elke $\epsilon > 0$ er een $\delta > 0$ is zodat $d\big(f(s), f(t)\big) < \epsilon$ als $d(s,t) < \delta$.

Stelling 21.4 (ii)

Zij $f\colon S \to S^*$ continu en $E \subseteq S$ compact. Dan is f uniform continu op E.

Bewijs:

- Voor elke $s \in E$ is er een δ_s zodat $d^*\big(f(s), f(t)\big) < \epsilon$ als $d(s,t) < \delta_s$.
- De collectie $\left\{B\left(s, \frac{1}{2}\delta_s\right) : s \in E\right\}$ vormt een open overdekking van E.
- Er zijn dus $s_1, \ldots, s_n$ zodat $E \subseteq B\left(s_1, \frac{1}{2}\delta_{s_1}\right) \cup \cdots \cup B\left(s_n, \frac{1}{2}\delta_{s_n}\right)$.
- Laat $\delta = \frac{1}{2}\min(\delta_{s_1}, \ldots, \delta s_n)$ en kies $s, t \in E$ met $d(s,t) < \delta$.
- Er bestaat k zodat $s \in B\left(s_k, \frac{1}{2}\delta_{s_k}\right)$, dus $d(s, s_k) < \frac{1}{2}\delta_{s_k}$.
- Dan is $d(s_k, t) \leq d(s_k, s) + d(s,t)$

Compactheid en uniforme continuïteit

Definitie

Een functie $S \to S^*$ heet uniform continu als voor elke $\epsilon > 0$ er een $\delta > 0$ is zodat $d\big(f(s), f(t)\big) < \epsilon$ als $d(s,t) < \delta$.

Stelling 21.4 (ii)

Zij $f\colon S \to S^*$ continu en $E \subseteq S$ compact. Dan is f uniform continu op E.

Bewijs:

- Voor elke $s \in E$ is er een δ_s zodat $d^*\big(f(s), f(t)\big) < \epsilon$ als $d(s,t) < \delta_s$.
- De collectie $\left\{B\left(s, \frac{1}{2}\delta_s\right) : s \in E\right\}$ vormt een open overdekking van E.
- Er zijn dus $s_1, \ldots, s_n$ zodat $E \subseteq B\left(s_1, \frac{1}{2}\delta_{s_1}\right) \cup \cdots \cup B\left(s_n, \frac{1}{2}\delta_{s_n}\right)$.
- Laat $\delta = \frac{1}{2}\min(\delta_{s_1}, \ldots, \delta s_n)$ en kies $s, t \in E$ met $d(s,t) < \delta$.
- Er bestaat k zodat $s \in B\left(s_k, \frac{1}{2}\delta_{s_k}\right)$, dus $d(s, s_k) < \frac{1}{2}\delta_{s_k}$.
- Dan is $d(s_k, t) \leq d(s_k, s) + d(s,t) < \frac{1}{2}\delta_{s_k} + \delta$

Compactheid en uniforme continuïteit

Definitie

Een functie $S \to S^*$ heet uniform continu als voor elke $\epsilon > 0$ er een $\delta > 0$ is zodat $d\big(f(s), f(t)\big) < \epsilon$ als $d(s,t) < \delta$.

Stelling 21.4 (ii)

Zij $f\colon S \to S^*$ continu en $E \subseteq S$ compact. Dan is f uniform continu op E.

Bewijs:

- Voor elke $s \in E$ is er een δ_s zodat $d^*\big(f(s), f(t)\big) < \epsilon$ als $d(s,t) < \delta_s$.
- De collectie $\left\{B\left(s, \frac{1}{2}\delta_s\right) : s \in E\right\}$ vormt een open overdekking van E.
- Er zijn dus $s_1, \ldots, s_n$ zodat $E \subseteq B\left(s_1, \frac{1}{2}\delta_{s_1}\right) \cup \cdots \cup B\left(s_n, \frac{1}{2}\delta_{s_n}\right)$.
- Laat $\delta = \frac{1}{2}\min(\delta_{s_1}, \ldots, \delta s_n)$ en kies $s, t \in E$ met $d(s,t) < \delta$.
- Er bestaat k zodat $s \in B\left(s_k, \frac{1}{2}\delta_{s_k}\right)$, dus $d(s, s_k) < \frac{1}{2}\delta_{s_k}$.
- Dan is $d(s_k, t) \leq d(s_k, s) + d(s,t) < \frac{1}{2}\delta_{s_k} + \delta \leq \delta_{s_k}$.

Compactheid en uniforme continuïteit

Definitie

Een functie $S \to S^*$ heet uniform continu als voor elke $\epsilon > 0$ er een $\delta > 0$ is zodat $d\big(f(s), f(t)\big) < \epsilon$ als $d(s,t) < \delta$.

Stelling 21.4 (ii)

Zij $f\colon S \to S^*$ continu en $E \subseteq S$ compact. Dan is f uniform continu op E.

Bewijs:

- Voor elke $s \in E$ is er een δ_s zodat $d^*\big(f(s), f(t)\big) < \epsilon$ als $d(s,t) < \delta_s$.
- De collectie $\left\{B\left(s, \frac{1}{2}\delta_s\right) : s \in E\right\}$ vormt een open overdekking van E.
- Er zijn dus $s_1, \ldots, s_n$ zodat $E \subseteq B\left(s_1, \frac{1}{2}\delta_{s_1}\right) \cup \cdots \cup B\left(s_n, \frac{1}{2}\delta_{s_n}\right)$.
- Laat $\delta = \frac{1}{2}\min(\delta_{s_1}, \ldots, \delta s_n)$ en kies $s, t \in E$ met $d(s,t) < \delta$.
- Er bestaat k zodat $s \in B\left(s_k, \frac{1}{2}\delta_{s_k}\right)$, dus $d(s, s_k) < \frac{1}{2}\delta_{s_k}$.
- Dan is $d(s_k, t) \leq d(s_k, s) + d(s,t) < \frac{1}{2}\delta_{s_k} + \delta \leq \delta_{s_k}$.
- Nu is $d^*\big(f(t), f(s_k)\big) < \epsilon$

Compactheid en uniforme continuïteit

Definitie

Een functie $S \to S^*$ heet uniform continu als voor elke $\epsilon > 0$ er een $\delta > 0$ is zodat $d\big(f(s), f(t)\big) < \epsilon$ als $d(s,t) < \delta$.

Stelling 21.4 (ii)

Zij $f\colon S \to S^*$ continu en $E \subseteq S$ compact. Dan is f uniform continu op E.

Bewijs:

- Voor elke $s \in E$ is er een δ_s zodat $d^*\big(f(s), f(t)\big) < \epsilon$ als $d(s,t) < \delta_s$.
- De collectie $\left\{B\left(s, \frac{1}{2}\delta_s\right) : s \in E\right\}$ vormt een open overdekking van E.
- Er zijn dus $s_1, \ldots, s_n$ zodat $E \subseteq B\left(s_1, \frac{1}{2}\delta_{s_1}\right) \cup \cdots \cup B\left(s_n, \frac{1}{2}\delta_{s_n}\right)$.
- Laat $\delta = \frac{1}{2}\min(\delta_{s_1}, \ldots, \delta s_n)$ en kies $s, t \in E$ met $d(s,t) < \delta$.
- Er bestaat k zodat $s \in B\left(s_k, \frac{1}{2}\delta_{s_k}\right)$, dus $d(s, s_k) < \frac{1}{2}\delta_{s_k}$.
- Dan is $d(s_k, t) \leq d(s_k, s) + d(s,t) < \frac{1}{2}\delta_{s_k} + \delta \leq \delta_{s_k}$.
- Nu is $d^*\big(f(t), f(s_k)\big) < \epsilon$ en evenzo $d^*\big(f(s), f(s_k)\big) < \epsilon$

Compactheid en uniforme continuïteit

Definitie

Een functie $S \to S^*$ heet uniform continu als voor elke $\epsilon > 0$ er een $\delta > 0$ is zodat $d\big(f(s), f(t)\big) < \epsilon$ als $d(s,t) < \delta$.

Stelling 21.4 (ii)

Zij $f\colon S \to S^*$ continu en $E \subseteq S$ compact. Dan is f uniform continu op E.

Bewijs:

- Voor elke $s \in E$ is er een δ_s zodat $d^*\big(f(s), f(t)\big) < \epsilon$ als $d(s,t) < \delta_s$.
- De collectie $\left\{B\left(s, \frac{1}{2}\delta_s\right) : s \in E\right\}$ vormt een open overdekking van E.
- Er zijn dus $s_1, \dots, s_n$ zodat $E \subseteq B\left(s_1, \frac{1}{2}\delta_{s_1}\right) \cup \cdots \cup B\left(s_n, \frac{1}{2}\delta_{s_n}\right)$.
- Laat $\delta = \frac{1}{2}\min(\delta_{s_1}, \dots, \delta s_n)$ en kies $s, t \in E$ met $d(s,t) < \delta$.
- Er bestaat k zodat $s \in B\left(s_k, \frac{1}{2}\delta_{s_k}\right)$, dus $d(s, s_k) < \frac{1}{2}\delta_{s_k}$.
- Dan is $d(s_k, t) \leq d(s_k, s) + d(s,t) < \frac{1}{2}\delta_{s_k} + \delta \leq \delta_{s_k}$.
- Nu is $d^*\big(f(t), f(s_k)\big) < \epsilon$ en evenzo $d^*\big(f(s), f(s_k)\big) < \epsilon$, dus

$$d^*\big(f(s), f(t)\big)$$

Compactheid en uniforme continuïteit

Definitie

Een functie $S \to S^*$ heet uniform continu als voor elke $\epsilon > 0$ er een $\delta > 0$ is zodat $d\big(f(s), f(t)\big) < \epsilon$ als $d(s,t) < \delta$.

Stelling 21.4 (ii)

Zij $f\colon S \to S^*$ continu en $E \subseteq S$ compact. Dan is f uniform continu op E.

Bewijs:

- Voor elke $s \in E$ is er een δ_s zodat $d^*\big(f(s), f(t)\big) < \epsilon$ als $d(s,t) < \delta_s$.
- De collectie $\left\{B\left(s, \frac{1}{2}\delta_s\right) : s \in E\right\}$ vormt een open overdekking van E.
- Er zijn dus $s_1, \ldots, s_n$ zodat $E \subseteq B\left(s_1, \frac{1}{2}\delta_{s_1}\right) \cup \cdots \cup B\left(s_n, \frac{1}{2}\delta_{s_n}\right)$.
- Laat $\delta = \frac{1}{2}\min(\delta_{s_1}, \ldots, \delta s_n)$ en kies $s, t \in E$ met $d(s,t) < \delta$.
- Er bestaat k zodat $s \in B\left(s_k, \frac{1}{2}\delta_{s_k}\right)$, dus $d(s, s_k) < \frac{1}{2}\delta_{s_k}$.
- Dan is $d(s_k, t) \leq d(s_k, s) + d(s,t) < \frac{1}{2}\delta_{s_k} + \delta \leq \delta_{s_k}$.
- Nu is $d^*\big(f(t), f(s_k)\big) < \epsilon$ en evenzo $d^*\big(f(s), f(s_k)\big) < \epsilon$, dus

$$d^*\big(f(s), f(t)\big) \leq d^*\big(f(s), f(s_k)\big) + d^*\big(f(s_k), f(t)\big)$$

Compactheid en uniforme continuïteit

Definitie

Een functie $S \to S^*$ heet uniform continu als voor elke $\epsilon > 0$ er een $\delta > 0$ is zodat $d\big(f(s), f(t)\big) < \epsilon$ als $d(s,t) < \delta$.

Stelling 21.4 (ii)

Zij $f\colon S \to S^*$ continu en $E \subseteq S$ compact. Dan is f uniform continu op E.

Bewijs:

- Voor elke $s \in E$ is er een δ_s zodat $d^*\big(f(s), f(t)\big) < \epsilon$ als $d(s,t) < \delta_s$.
- De collectie $\left\{B\left(s, \frac{1}{2}\delta_s\right) : s \in E\right\}$ vormt een open overdekking van E.
- Er zijn dus $s_1, \ldots, s_n$ zodat $E \subseteq B\left(s_1, \frac{1}{2}\delta_{s_1}\right) \cup \cdots \cup B\left(s_n, \frac{1}{2}\delta_{s_n}\right)$.
- Laat $\delta = \frac{1}{2}\min(\delta_{s_1}, \ldots, \delta s_n)$ en kies $s, t \in E$ met $d(s,t) < \delta$.
- Er bestaat k zodat $s \in B\left(s_k, \frac{1}{2}\delta_{s_k}\right)$, dus $d(s, s_k) < \frac{1}{2}\delta_{s_k}$.
- Dan is $d(s_k, t) \le d(s_k, s) + d(s,t) < \frac{1}{2}\delta_{s_k} + \delta \le \delta_{s_k}$.
- Nu is $d^*\big(f(t), f(s_k)\big) < \epsilon$ en evenzo $d^*\big(f(s), f(s_k)\big) < \epsilon$, dus

$$d^*\big(f(s), f(t)\big) \le d^*\big(f(s), f(s_k)\big) + d^*\big(f(s_k), f(t)\big) < 2\epsilon.$$

Limieten en functies

Definitie

Zij $f : S \to S^*$ een functie. Zij $s_0 \in S$. We schrijven

$$\lim_{s \to s_0} f(s) = L$$

voor zekere $L \in S^*$ als voor elke $\epsilon > 0$ er een $\delta > 0$ bestaat zodat $d^*\big(f(s), L\big) < \epsilon$ geldt als $d(s, s_0) < \delta$.

Definitie

Zij $f : S \to S^*$ een functie. Zij $s_0 \in S$. We schrijven

$$\lim_{s \to s_0} f(s) = L$$

voor zekere $L \in S^*$ als voor elke $\epsilon > 0$ er een $\delta > 0$ bestaat zodat $d^*\big(f(s), L\big) < \epsilon$ geldt als $d(s, s_0) < \delta$.

Merk op: equivalent zijn

Limieten en functies

Definitie

Zij $f\colon S \to S^*$ een functie. Zij $s_0 \in S$. We schrijven

$$\lim_{s \to s_0} f(s) = L$$

voor zekere $L \in S^*$ als voor elke $\epsilon > 0$ er een $\delta > 0$ bestaat zodat $d^*\big(f(s), L\big) < \epsilon$ geldt als $d(s, s_0) < \delta$.

Merk op: equivalent zijn

1. f continu in s_0,
2. $\lim_{s \to s_0} f(s) = f(s_0)$,

Limieten en functies

Definitie

Zij $f : S \to S^*$ een functie. Zij $s_0 \in S$. We schrijven

$$\lim_{s \to s_0} f(s) = L$$

voor zekere $L \in S^*$ als voor elke $\epsilon > 0$ er een $\delta > 0$ bestaat zodat $d^*\big(f(s), L\big) < \epsilon$ geldt als $d(s, s_0) < \delta$.

Merk op: equivalent zijn

1. f continu in s_0,
2. $\lim_{s \to s_0} f(s) = f(s_0)$,
3. voor elke rij $s_n \to s_0$ geldt $f(s_n) \to f(s_0)$.

Situatie

In het vervolg zullen we ons beperken tot functies van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}^m$.

Situatie

In het vervolg zullen we ons beperken tot functies van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}^m$. Vaak, maar niet altijd, is $n = 2$ en $m = 1$.

Situatie

In het vervolg zullen we ons beperken tot functies van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}^m$. Vaak, maar niet altijd, is $n = 2$ en $m = 1$. We gebruiken op $\mathbb{R}^k$ de metriek

$$d(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}})$$

Situatie

In het vervolg zullen we ons beperken tot functies van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}^m$. Vaak, maar niet altijd, is $n = 2$ en $m = 1$. We gebruiken op $\mathbb{R}^k$ de metriek

$$d(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \sqrt{\sum_{j=1}^{k}(x_j - y_j)^2}$$

Situatie

In het vervolg zullen we ons beperken tot functies van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}^m$. Vaak, maar niet altijd, is $n = 2$ en $m = 1$. We gebruiken op $\mathbb{R}^k$ de metriek

$$d(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} (x_j - y_j)^2} = \|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{y}}\|$$

Situatie

In het vervolg zullen we ons beperken tot functies van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}^m$. Vaak, maar niet altijd, is $n = 2$ en $m = 1$. We gebruiken op $\mathbb{R}^k$ de metriek

$$d(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \sqrt{\sum_{j=1}^{k}(x_j - y_j)^2} = \|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{y}}\|$$

afkomstig van de bijbehorende Euclidische norm

$$\|\vec{\mathbf{x}}\|$$

Situatie

In het vervolg zullen we ons beperken tot functies van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}^m$. Vaak, maar niet altijd, is $n = 2$ en $m = 1$. We gebruiken op $\mathbb{R}^k$ de metriek

$$d(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} (x_j - y_j)^2} = \|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{y}}\|$$

afkomstig van de bijbehorende Euclidische norm

$$\|\vec{\mathbf{x}}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} x_j^2}.$$

Situatie

In het vervolg zullen we ons beperken tot functies van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}^m$. Vaak, maar niet altijd, is $n = 2$ en $m = 1$. We gebruiken op $\mathbb{R}^k$ de metriek

$$d(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} (x_j - y_j)^2} = \|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{y}}\|$$

afkomstig van de bijbehorende Euclidische norm

$$\|\vec{\mathbf{x}}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} x_j^2}.$$

Voor een functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ betekent een limiet als

$$\lim_{\vec{\mathbf{x}} \to \vec{\mathbf{0}}} f(\vec{\mathbf{x}}) = L$$

Situatie

In het vervolg zullen we ons beperken tot functies van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}^m$. Vaak, maar niet altijd, is $n = 2$ en $m = 1$. We gebruiken op $\mathbb{R}^k$ de metriek

$$d(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} (x_j - y_j)^2} = \|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{y}}\|$$

afkomstig van de bijbehorende Euclidische norm

$$\|\vec{\mathbf{x}}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} x_j^2}.$$

Voor een functie $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ betekent een limiet als

$$\lim_{\vec{\mathbf{x}} \to \vec{\mathbf{0}}} f(\vec{\mathbf{x}}) = L$$

dat voor alle $\epsilon > 0$ er $\delta > 0$ is zodat $|f(\vec{\mathbf{x}}) - L| < \epsilon$ als $\|\vec{\mathbf{x}}\| < \delta$.

Situatie

In het vervolg zullen we ons beperken tot functies van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}^m$. Vaak, maar niet altijd, is $n = 2$ en $m = 1$. We gebruiken op $\mathbb{R}^k$ de metriek

$$d(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} (x_j - y_j)^2} = \|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{y}}\|$$

afkomstig van de bijbehorende Euclidische norm

$$\|\vec{\mathbf{x}}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} x_j^2}.$$

Voor een functie $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ betekent een limiet als

$$\lim_{\vec{\mathbf{x}} \to \vec{\mathbf{0}}} f(\vec{\mathbf{x}}) = L$$

dat voor alle $\epsilon > 0$ er $\delta > 0$ is zodat $|f(\vec{\mathbf{x}}) - L| < \epsilon$ als $\|\vec{\mathbf{x}}\| < \delta$.

Oftewel: $f(\vec{\mathbf{x}})$ gaat naar L als $\vec{\mathbf{x}}$ nadert

Situatie

In het vervolg zullen we ons beperken tot functies van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}^m$. Vaak, maar niet altijd, is $n = 2$ en $m = 1$. We gebruiken op $\mathbb{R}^k$ de metriek

$$d(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} (x_j - y_j)^2} = \|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{y}}\|$$

afkomstig van de bijbehorende Euclidische norm

$$\|\vec{\mathbf{x}}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} x_j^2}.$$

Voor een functie $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ betekent een limiet als

$$\lim_{\vec{\mathbf{x}} \to \vec{\mathbf{0}}} f(\vec{\mathbf{x}}) = L$$

dat voor alle $\epsilon > 0$ er $\delta > 0$ is zodat $|f(\vec{\mathbf{x}}) - L| < \epsilon$ als $\|\vec{\mathbf{x}}\| < \delta$.

Oftewel: $f(\vec{\mathbf{x}})$ gaat naar L als $\vec{\mathbf{x}}$ nadert, onafhankelijk van de richting.

Homogeniteit

Definitie (Syllabus 7.14)

We noemen $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ homogeen van graad α als voor elke $\vec{\mathbf{x}} \neq 0$ en $r > 0$ geldt

$$f(r\vec{\mathbf{x}}) = r^\alpha f(\vec{\mathbf{x}}).$$

Homogeniteit

Definitie (Syllabus 7.14)

We noemen $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ homogeen van graad α als voor elke $\vec{\mathbf{x}} \neq 0$ en $r > 0$ geldt

$$f(r\vec{\mathbf{x}}) = r^\alpha f(\vec{\mathbf{x}}).$$

Bekijk op $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ de functies

$$f_1(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^4 + y^4}, \qquad f_2(x,y) = \sin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), \qquad f_3(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}.$$

Homogeniteit

Definitie (Syllabus 7.14)

We noemen $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ homogeen van graad α als voor elke $\vec{\mathbf{x}} \neq 0$ en $r > 0$ geldt

$$f(r\vec{\mathbf{x}}) = r^\alpha f(\vec{\mathbf{x}}).$$

Bekijk op $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ de functies

$$f_1(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^4 + y^4}, \qquad f_2(x,y) = \sin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), \qquad f_3(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}.$$

Deze zijn homogeen

Homogeniteit

Definitie (Syllabus 7.14)

We noemen $f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ homogeen van graad α als voor elke $\vec{\mathbf{x}} \neq 0$ en $r > 0$ geldt

$$f(r\vec{\mathbf{x}}) = r^\alpha f(\vec{\mathbf{x}}).$$

Bekijk op $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ de functies

$$f_1(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^4 + y^4}, \qquad f_2(x,y) = \sin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), \qquad f_3(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}.$$

Deze zijn homogeen, met graden -2

Homogeniteit

Definitie (Syllabus 7.14)

We noemen $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ homogeen van graad α als voor elke $\vec{\mathbf{x}} \neq 0$ en $r > 0$ geldt

$$f(r\vec{\mathbf{x}}) = r^\alpha f(\vec{\mathbf{x}}).$$

Bekijk op $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ de functies

$$f_1(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^4 + y^4}, \qquad f_2(x,y) = \sin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), \qquad f_3(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}.$$

Deze zijn homogeen, met graden -2, 0

Homogeniteit

Definitie (Syllabus 7.14)

We noemen $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ homogeen van graad α als voor elke $\vec{\mathbf{x}} \neq 0$ en $r > 0$ geldt

$$f(r\vec{\mathbf{x}}) = r^\alpha f(\vec{\mathbf{x}}).$$

Bekijk op $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ de functies

$$f_1(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^4 + y^4}, \qquad f_2(x,y) = \sin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), \qquad f_3(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}.$$

Deze zijn homogeen, met graden -2, 0 en 1.

Homogeniteit en limiet

Definitie (Syllabus 7.14)

We noemen $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ homogeen van graad α als voor elke $\vec{\mathbf{x}} \neq 0$ en $r > 0$ geldt

$$f(r\vec{\mathbf{x}}) = r^{\alpha} f(\vec{\mathbf{x}}).$$

Homogeniteit en limiet

Definitie (Syllabus 7.14)

We noemen $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ homogeen van graad α als voor elke $\vec{\mathbf{x}} \neq 0$ en $r > 0$ geldt

$$f(r\vec{\mathbf{x}}) = r^\alpha f(\vec{\mathbf{x}}).$$

Propositie (Syllabus 7.15)

Zij $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ continu, homogeen van graad α en niet constant. Dan is $\lim_{\vec{\mathbf{x}} \to \vec{\mathbf{0}}} f(\vec{\mathbf{x}}) = 0$ als $\alpha > 0$ en bestaat deze limiet niet als $\alpha \leq 0$.

Homogeniteit en limiet

Definitie (Syllabus 7.14)

We noemen $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ homogeen van graad α als voor elke $\vec{\mathbf{x}} \neq 0$ en $r > 0$ geldt

$$f(r\vec{\mathbf{x}}) = r^\alpha f(\vec{\mathbf{x}}).$$

Propositie (Syllabus 7.15)

Zij $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ continu, homogeen van graad α en niet constant. Dan is $\lim_{\vec{\mathbf{x}} \to \vec{\mathbf{0}}} f(\vec{\mathbf{x}}) = 0$ als $\alpha > 0$ en bestaat deze limiet niet als $\alpha \leq 0$.

Bewijs:

Homogeniteit en limiet

Definitie (Syllabus 7.14)

We noemen $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ homogeen van graad α als voor elke $\vec{\mathbf{x}} \neq 0$ en $r > 0$ geldt

$$f(r\vec{\mathbf{x}}) = r^\alpha f(\vec{\mathbf{x}}).$$

Propositie (Syllabus 7.15)

Zij $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ continu, homogeen van graad α en niet constant. Dan is $\lim_{\vec{\mathbf{x}} \to \vec{\mathbf{0}}} f(\vec{\mathbf{x}}) = 0$ als $\alpha > 0$ en bestaat deze limiet niet als $\alpha \leq 0$.

Bewijs: stel $\alpha > 0$.

Homogeniteit en limiet

Definitie (Syllabus 7.14)

We noemen $f\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ homogeen van graad α als voor elke $\vec{\mathbf{x}} \neq 0$ en $r > 0$ geldt

$$f(r\vec{\mathbf{x}}) = r^\alpha f(\vec{\mathbf{x}}).$$

Propositie (Syllabus 7.15)

Zij $f\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ continu, homogeen van graad α en niet constant. Dan is $\lim_{\vec{\mathbf{x}}\to\vec{\mathbf{0}}} f(\vec{\mathbf{x}}) = 0$ als $\alpha > 0$ en bestaat deze limiet niet als $\alpha \leq 0$.

Bewijs: stel $\alpha > 0$.

- De sfeer $S^{n-1} = \{\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{\mathbf{x}}\| = 1\}$

Homogeniteit en limiet

Definitie (Syllabus 7.14)

We noemen $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ homogeen van graad α als voor elke $\vec{\mathbf{x}} \neq 0$ en $r > 0$ geldt

$$f(r\vec{\mathbf{x}}) = r^\alpha f(\vec{\mathbf{x}}).$$

Propositie (Syllabus 7.15)

Zij $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ continu, homogeen van graad α en niet constant. Dan is $\lim_{\vec{\mathbf{x}} \to \vec{\mathbf{0}}} f(\vec{\mathbf{x}}) = 0$ als $\alpha > 0$ en bestaat deze limiet niet als $\alpha \leq 0$.

Bewijs: stel $\alpha > 0$.

- De sfeer $S^{n-1} = \{\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n : ||\vec{\mathbf{x}}|| = 1\}$ is gesloten en begrensd in $\mathbb{R}^n$

Homogeniteit en limiet

Definitie (Syllabus 7.14)

We noemen $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ homogeen van graad α als voor elke $\vec{\mathbf{x}} \neq 0$ en $r > 0$ geldt

$$f(r\vec{\mathbf{x}}) = r^\alpha f(\vec{\mathbf{x}}).$$

Propositie (Syllabus 7.15)

Zij $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ continu, homogeen van graad α en niet constant. Dan is $\lim_{\vec{\mathbf{x}} \to \vec{\mathbf{0}}} f(\vec{\mathbf{x}}) = 0$ als $\alpha > 0$ en bestaat deze limiet niet als $\alpha \leq 0$.

Bewijs: stel $\alpha > 0$.

- De sfeer $S^{n-1} = \{\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n : ||\vec{\mathbf{x}}|| = 1\}$ is gesloten en begrensd in $\mathbb{R}^n$, dus compact.

Homogeniteit en limiet

Definitie (Syllabus 7.14)

We noemen $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ homogeen van graad α als voor elke $\vec{\mathbf{x}} \neq 0$ en $r > 0$ geldt

$$f(r\vec{\mathbf{x}}) = r^\alpha f(\vec{\mathbf{x}}).$$

Propositie (Syllabus 7.15)

Zij $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ continu, homogeen van graad α en niet constant. Dan is $\lim_{\vec{\mathbf{x}} \to \vec{\mathbf{0}}} f(\vec{\mathbf{x}}) = 0$ als $\alpha > 0$ en bestaat deze limiet niet als $\alpha \leq 0$.

Bewijs: stel $\alpha > 0$.

- De sfeer $S^{n-1} = \{\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n : ||\vec{\mathbf{x}}|| = 1\}$ is gesloten en begrensd in $\mathbb{R}^n$, dus compact.
- Dan is f begrensd op S^{n-1}

Homogeniteit en limiet

Definitie (Syllabus 7.14)

We noemen $f\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ homogeen van graad α als voor elke $\vec{\mathbf{x}} \neq 0$ en $r > 0$ geldt

$$f(r\vec{\mathbf{x}}) = r^\alpha f(\vec{\mathbf{x}}).$$

Propositie (Syllabus 7.15)

Zij $f\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ continu, homogeen van graad α en niet constant. Dan is $\lim_{\vec{\mathbf{x}} \to \vec{\mathbf{0}}} f(\vec{\mathbf{x}}) = 0$ als $\alpha > 0$ en bestaat deze limiet niet als $\alpha \leq 0$.

Bewijs: stel $\alpha > 0$.

- De sfeer $S^{n-1} = \{\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{\mathbf{x}}\| = 1\}$ is gesloten en begrensd in $\mathbb{R}^n$, dus compact.
- Dan is f begrensd op S^{n-1}: er is M zodat voor alle $\|\vec{\mathbf{x}}\| \in S^{n-1}$ geldt $|f(\vec{\mathbf{x}})| \leq M$.

Homogeniteit en limiet

Definitie (Syllabus 7.14)

We noemen $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ homogeen van graad α als voor elke $\vec{\mathbf{x}} \neq 0$ en $r > 0$ geldt

$$f(r\vec{\mathbf{x}}) = r^\alpha f(\vec{\mathbf{x}}).$$

Propositie (Syllabus 7.15)

Zij $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ continu, homogeen van graad α en niet constant. Dan is $\lim_{\vec{\mathbf{x}} \to \vec{\mathbf{0}}} f(\vec{\mathbf{x}}) = 0$ als $\alpha > 0$ en bestaat deze limiet niet als $\alpha \leq 0$.

Bewijs: stel $\alpha > 0$.

- De sfeer $S^{n-1} = \{\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{\mathbf{x}}\| = 1\}$ is gesloten en begrensd in $\mathbb{R}^n$, dus compact.
- Dan is f begrensd op S^{n-1}: er is M zodat voor alle $\|\vec{\mathbf{x}}\| \in S^{n-1}$ geldt $|f(\vec{\mathbf{x}})| \leq M$.
- Voor $\vec{\mathbf{x}}$ willekeurig

Homogeniteit en limiet

Definitie (Syllabus 7.14)

We noemen $f\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ homogeen van graad α als voor elke $\vec{\mathbf{x}} \neq 0$ en $r > 0$ geldt

$$f(r\vec{\mathbf{x}}) = r^\alpha f(\vec{\mathbf{x}}).$$

Propositie (Syllabus 7.15)

Zij $f\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ continu, homogeen van graad α en niet constant. Dan is $\lim_{\vec{\mathbf{x}}\to\vec{\mathbf{0}}} f(\vec{\mathbf{x}}) = 0$ als $\alpha > 0$ en bestaat deze limiet niet als $\alpha \leq 0$.

Bewijs: stel $\alpha > 0$.

- De sfeer $S^{n-1} = \{\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{\mathbf{x}}\| = 1\}$ is gesloten en begrensd in $\mathbb{R}^n$, dus compact.
- Dan is f begrensd op S^{n-1}: er is M zodat voor alle $\|\vec{\mathbf{x}}\| \in S^{n-1}$ geldt $|f(\vec{\mathbf{x}})| \leq M$.
- Voor $\vec{\mathbf{x}}$ willekeurig kunnen we schrijven $\vec{\mathbf{z}} = \frac{\vec{\mathbf{x}}}{\|\vec{\mathbf{x}}\|}$

Homogeniteit en limiet

Definitie (Syllabus 7.14)

We noemen $f\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ homogeen van graad α als voor elke $\vec{\mathbf{x}} \neq 0$ en $r > 0$ geldt

$$f(r\vec{\mathbf{x}}) = r^\alpha f(\vec{\mathbf{x}}).$$

Propositie (Syllabus 7.15)

Zij $f\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ continu, homogeen van graad α en niet constant. Dan is $\lim_{\vec{\mathbf{x}} \to \vec{\mathbf{0}}} f(\vec{\mathbf{x}}) = 0$ als $\alpha > 0$ en bestaat deze limiet niet als $\alpha \leq 0$.

Bewijs: stel $\alpha > 0$.

- De sfeer $S^{n-1} = \{\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{\mathbf{x}}\| = 1\}$ is gesloten en begrensd in $\mathbb{R}^n$, dus compact.
- Dan is f begrensd op S^{n-1}: er is M zodat voor alle $\|\vec{\mathbf{x}}\| \in S^{n-1}$ geldt $|f(\vec{\mathbf{x}})| \leq M$.
- Voor $\vec{\mathbf{x}}$ willekeurig kunnen we schrijven $\vec{\mathbf{z}} = \frac{\vec{\mathbf{x}}}{\|\vec{\mathbf{x}}\|}$, zodat $\|\vec{\mathbf{z}}\| = 1$

Homogeniteit en limiet

Definitie (Syllabus 7.14)

We noemen $f\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ homogeen van graad α als voor elke $\vec{\mathbf{x}} \neq 0$ en $r > 0$ geldt

$$f(r\vec{\mathbf{x}}) = r^\alpha f(\vec{\mathbf{x}}).$$

Propositie (Syllabus 7.15)

Zij $f\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ continu, homogeen van graad α en niet constant. Dan is $\lim_{\vec{\mathbf{x}} \to \vec{\mathbf{0}}} f(\vec{\mathbf{x}}) = 0$ als $\alpha > 0$ en bestaat deze limiet niet als $\alpha \leq 0$.

Bewijs: stel $\alpha > 0$.

- De sfeer $S^{n-1} = \{\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{\mathbf{x}}\| = 1\}$ is gesloten en begrensd in $\mathbb{R}^n$, dus compact.
- Dan is f begrensd op S^{n-1}: er is M zodat voor alle $\|\vec{\mathbf{x}}\| \in S^{n-1}$ geldt $|f(\vec{\mathbf{x}})| \leq M$.
- Voor $\vec{\mathbf{x}}$ willekeurig kunnen we schrijven $\vec{\mathbf{z}} = \frac{\vec{\mathbf{x}}}{\|\vec{\mathbf{x}}\|}$, zodat $\|\vec{\mathbf{z}}\| = 1$ en $\vec{\mathbf{x}} = \|\vec{\mathbf{x}}\|\vec{\mathbf{z}}$.

Homogeniteit en limiet

Definitie (Syllabus 7.14)

We noemen $f\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ homogeen van graad α als voor elke $\vec{\mathbf{x}} \neq 0$ en $r > 0$ geldt

$$f(r\vec{\mathbf{x}}) = r^\alpha f(\vec{\mathbf{x}}).$$

Propositie (Syllabus 7.15)

Zij $f\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ continu, homogeen van graad α en niet constant. Dan is $\lim_{\vec{\mathbf{x}} \to \vec{\mathbf{0}}} f(\vec{\mathbf{x}}) = 0$ als $\alpha > 0$ en bestaat deze limiet niet als $\alpha \leq 0$.

Bewijs: stel $\alpha > 0$.

- De sfeer $S^{n-1} = \{\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{\mathbf{x}}\| = 1\}$ is gesloten en begrensd in $\mathbb{R}^n$, dus compact.
- Dan is f begrensd op S^{n-1}: er is M zodat voor alle $\|\vec{\mathbf{x}}\| \in S^{n-1}$ geldt $|f(\vec{\mathbf{x}})| \leq M$.
- Voor $\vec{\mathbf{x}}$ willekeurig kunnen we schrijven $\vec{\mathbf{z}} = \frac{\vec{\mathbf{x}}}{\|\vec{\mathbf{x}}\|}$, zodat $\|\vec{\mathbf{z}}\| = 1$ en $\vec{\mathbf{x}} = \|\vec{\mathbf{x}}\|\vec{\mathbf{z}}$. Dan

$$|f(\vec{\mathbf{x}})|$$

Homogeniteit en limiet

Definitie (Syllabus 7.14)

We noemen $f\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ homogeen van graad α als voor elke $\vec{\mathbf{x}} \neq 0$ en $r > 0$ geldt

$$f(r\vec{\mathbf{x}}) = r^\alpha f(\vec{\mathbf{x}}).$$

Propositie (Syllabus 7.15)

Zij $f\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ continu, homogeen van graad α en niet constant. Dan is $\lim_{\vec{\mathbf{x}}\to\vec{\mathbf{0}}} f(\vec{\mathbf{x}}) = 0$ als $\alpha > 0$ en bestaat deze limiet niet als $\alpha \leq 0$.

Bewijs: stel $\alpha > 0$.

- De sfeer $S^{n-1} = \{\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{\mathbf{x}}\| = 1\}$ is gesloten en begrensd in $\mathbb{R}^n$, dus compact.
- Dan is f begrensd op S^{n-1}: er is M zodat voor alle $\|\vec{\mathbf{x}}\| \in S^{n-1}$ geldt $|f(\vec{\mathbf{x}})| \leq M$.
- Voor $\vec{\mathbf{x}}$ willekeurig kunnen we schrijven $\vec{\mathbf{z}} = \frac{\vec{\mathbf{x}}}{\|\vec{\mathbf{x}}\|}$, zodat $\|\vec{\mathbf{z}}\| = 1$ en $\vec{\mathbf{x}} = \|\vec{\mathbf{x}}\|\vec{\mathbf{z}}$. Dan

$$|f(\vec{\mathbf{x}})| = \left|f\left(\|\vec{\mathbf{x}}\| \cdot \vec{\mathbf{z}}\right)\right|$$

Homogeniteit en limiet

Definitie (Syllabus 7.14)

We noemen $f\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ homogeen van graad α als voor elke $\vec{\mathbf{x}} \neq 0$ en $r > 0$ geldt

$$f(r\vec{\mathbf{x}}) = r^\alpha f(\vec{\mathbf{x}}).$$

Propositie (Syllabus 7.15)

Zij $f\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ continu, homogeen van graad α en niet constant. Dan is $\lim_{\vec{\mathbf{x}}\to\vec{\mathbf{0}}} f(\vec{\mathbf{x}}) = 0$ als $\alpha > 0$ en bestaat deze limiet niet als $\alpha \leq 0$.

Bewijs: stel $\alpha > 0$.

- De sfeer $S^{n-1} = \{\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{\mathbf{x}}\| = 1\}$ is gesloten en begrensd in $\mathbb{R}^n$, dus compact.
- Dan is f begrensd op S^{n-1}: er is M zodat voor alle $\|\vec{\mathbf{x}}\| \in S^{n-1}$ geldt $|f(\vec{\mathbf{x}})| \leq M$.
- Voor $\vec{\mathbf{x}}$ willekeurig kunnen we schrijven $\vec{\mathbf{z}} = \frac{\vec{\mathbf{x}}}{\|\vec{\mathbf{x}}\|}$, zodat $\|\vec{\mathbf{z}}\| = 1$ en $\vec{\mathbf{x}} = \|\vec{\mathbf{x}}\|\vec{\mathbf{z}}$. Dan

$$|f(\vec{\mathbf{x}})| = \left|f\left(\|\vec{\mathbf{x}}\| \cdot \vec{\mathbf{z}}\right)\right| = \|\vec{\mathbf{x}}\|^\alpha \cdot |f(\vec{\mathbf{z}})|$$

Homogeniteit en limiet

Definitie (Syllabus 7.14)

We noemen $f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ homogeen van graad α als voor elke $\vec{\mathbf{x}} \neq 0$ en $r > 0$ geldt

$$f(r\vec{\mathbf{x}}) = r^\alpha f(\vec{\mathbf{x}}).$$

Propositie (Syllabus 7.15)

Zij $f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ continu, homogeen van graad α en niet constant. Dan is $\lim_{\vec{\mathbf{x}} \to \vec{\mathbf{0}}} f(\vec{\mathbf{x}}) = 0$ als $\alpha > 0$ en bestaat deze limiet niet als $\alpha \leq 0$.

Bewijs: stel $\alpha > 0$.

- De sfeer $S^{n-1} = \{\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{\mathbf{x}}\| = 1\}$ is gesloten en begrensd in $\mathbb{R}^n$, dus compact.
- Dan is f begrensd op S^{n-1}: er is M zodat voor alle $\|\vec{\mathbf{x}}\| \in S^{n-1}$ geldt $|f(\vec{\mathbf{x}})| \leq M$.
- Voor $\vec{\mathbf{x}}$ willekeurig kunnen we schrijven $\vec{\mathbf{z}} = \frac{\vec{\mathbf{x}}}{\|\vec{\mathbf{x}}\|}$, zodat $\|\vec{\mathbf{z}}\| = 1$ en $\vec{\mathbf{x}} = \|\vec{\mathbf{x}}\|\vec{\mathbf{z}}$. Dan

$$|f(\vec{\mathbf{x}})| = \left|f\left(\|\vec{\mathbf{x}}\| \cdot \vec{\mathbf{z}}\right)\right| = \|\vec{\mathbf{x}}\|^\alpha \cdot |f(\vec{\mathbf{z}})| \leq M\|\vec{\mathbf{x}}\|^\alpha.$$

Homogeniteit en limiet

Definitie (Syllabus 7.14)

We noemen $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ homogeen van graad α als voor elke $\vec{\mathbf{x}} \neq 0$ en $r > 0$ geldt

$$f(r\vec{\mathbf{x}}) = r^{\alpha} f(\vec{\mathbf{x}}).$$

Propositie (Syllabus 7.15)

Zij $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ continu, homogeen van graad α en niet constant. Dan is $\lim_{\vec{\mathbf{x}} \to \vec{\mathbf{0}}} f(\vec{\mathbf{x}}) = 0$ als $\alpha > 0$ en bestaat deze limiet niet als $\alpha \leq 0$.

Bewijs: stel $\alpha > 0$.

- De sfeer $S^{n-1} = \{\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{\mathbf{x}}\| = 1\}$ is gesloten en begrensd in $\mathbb{R}^n$, dus compact.
- Dan is f begrensd op S^{n-1}: er is M zodat voor alle $\|\vec{\mathbf{x}}\| \in S^{n-1}$ geldt $|f(\vec{\mathbf{x}})| \leq M$.
- Voor $\vec{\mathbf{x}}$ willekeurig kunnen we schrijven $\vec{\mathbf{z}} = \frac{\vec{\mathbf{x}}}{\|\vec{\mathbf{x}}\|}$, zodat $\|\vec{\mathbf{z}}\| = 1$ en $\vec{\mathbf{x}} = \|\vec{\mathbf{x}}\|\vec{\mathbf{z}}$. Dan

$$|f(\vec{\mathbf{x}})| = \left| f\left(\|\vec{\mathbf{x}}\| \cdot \vec{\mathbf{z}}\right) \right| = \|\vec{\mathbf{x}}\|^{\alpha} \cdot |f(\vec{\mathbf{z}})| \leq M\|\vec{\mathbf{x}}\|^{\alpha}.$$

- Dus omdat $\alpha > 0$

Homogeniteit en limiet

Definitie (Syllabus 7.14)

We noemen $f\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ homogeen van graad α als voor elke $\vec{\mathbf{x}} \neq 0$ en $r > 0$ geldt

$$f(r\vec{\mathbf{x}}) = r^\alpha f(\vec{\mathbf{x}}).$$

Propositie (Syllabus 7.15)

Zij $f\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ continu, homogeen van graad α en niet constant. Dan is $\lim_{\vec{\mathbf{x}}\to\vec{\mathbf{0}}} f(\vec{\mathbf{x}}) = 0$ als $\alpha > 0$ en bestaat deze limiet niet als $\alpha \leq 0$.

Bewijs: stel $\alpha > 0$.

- De sfeer $S^{n-1} = \{\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{\mathbf{x}}\| = 1\}$ is gesloten en begrensd in $\mathbb{R}^n$, dus compact.
- Dan is f begrensd op S^{n-1}: er is M zodat voor alle $\|\vec{\mathbf{x}}\| \in S^{n-1}$ geldt $|f(\vec{\mathbf{x}})| \leq M$.
- Voor $\vec{\mathbf{x}}$ willekeurig kunnen we schrijven $\vec{\mathbf{z}} = \frac{\vec{\mathbf{x}}}{\|\vec{\mathbf{x}}\|}$, zodat $\|\vec{\mathbf{z}}\| = 1$ en $\vec{\mathbf{x}} = \|\vec{\mathbf{x}}\|\vec{\mathbf{z}}$. Dan

$$|f(\vec{\mathbf{x}})| = \left|f\left(\|\vec{\mathbf{x}}\| \cdot \vec{\mathbf{z}}\right)\right| = \|\vec{\mathbf{x}}\|^\alpha \cdot |f(\vec{\mathbf{z}})| \leq M\|\vec{\mathbf{x}}\|^\alpha.$$

- Dus omdat $\alpha > 0$ zien we dat $f(\vec{\mathbf{x}}) \to 0$ als $\vec{\mathbf{x}} \to 0$.

Homogeniteit en limiet

Definitie (Syllabus 7.14)

We noemen $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ homogeen van graad α als voor elke $\vec{\mathbf{x}} \neq 0$ en $r > 0$ geldt

$$f(r\vec{\mathbf{x}}) = r^\alpha f(\vec{\mathbf{x}}).$$

Propositie (Syllabus 7.15)

Zij $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ continu, homogeen van graad α en niet constant. Dan is $\lim_{\vec{\mathbf{x}} \to \vec{\mathbf{0}}} f(\vec{\mathbf{x}}) = 0$ als $\alpha > 0$ en bestaat deze limiet niet als $\alpha \leq 0$.

Bewijs, vervolg: stel $\alpha < 0$.

Homogeniteit en limiet

Definitie (Syllabus 7.14)

We noemen $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ homogeen van graad α als voor elke $\vec{\mathbf{x}} \neq 0$ en $r > 0$ geldt

$$f(r\vec{\mathbf{x}}) = r^\alpha f(\vec{\mathbf{x}}).$$

Propositie (Syllabus 7.15)

Zij $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ continu, homogeen van graad α en niet constant. Dan is $\lim_{\vec{\mathbf{x}} \to \vec{\mathbf{0}}} f(\vec{\mathbf{x}}) = 0$ als $\alpha > 0$ en bestaat deze limiet niet als $\alpha \leq 0$.

Bewijs, vervolg: stel $\alpha < 0$.

- Neem $\vec{\mathbf{x}}$ zodat $f(\vec{\mathbf{x}}) \neq 0$.

Homogeniteit en limiet

Definitie (Syllabus 7.14)

We noemen $f\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ homogeen van graad α als voor elke $\vec{\mathbf{x}} \neq 0$ en $r > 0$ geldt

$$f(r\vec{\mathbf{x}}) = r^\alpha f(\vec{\mathbf{x}}).$$

Propositie (Syllabus 7.15)

Zij $f\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ continu, homogeen van graad α en niet constant. Dan is $\lim_{\vec{\mathbf{x}}\to\vec{\mathbf{0}}} f(\vec{\mathbf{x}}) = 0$ als $\alpha > 0$ en bestaat deze limiet niet als $\alpha \leq 0$.

Bewijs, vervolg: stel $\alpha < 0$.

- Neem $\vec{\mathbf{x}}$ zodat $f(\vec{\mathbf{x}}) \neq 0$.
- Dan is $f(r\vec{\mathbf{x}}) = r^\alpha f(\vec{\mathbf{x}})$.

Homogeniteit en limiet

Definitie (Syllabus 7.14)

We noemen $f\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ homogeen van graad α als voor elke $\vec{\mathbf{x}} \neq 0$ en $r > 0$ geldt

$$f(r\vec{\mathbf{x}}) = r^\alpha f(\vec{\mathbf{x}}).$$

Propositie (Syllabus 7.15)

Zij $f\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ continu, homogeen van graad α en niet constant. Dan is $\lim_{\vec{\mathbf{x}}\to\vec{\mathbf{0}}} f(\vec{\mathbf{x}}) = 0$ als $\alpha > 0$ en bestaat deze limiet niet als $\alpha \leq 0$.

Bewijs, vervolg: stel $\alpha < 0$.

- Neem $\vec{\mathbf{x}}$ zodat $f(\vec{\mathbf{x}}) \neq 0$.
- Dan is $f(r\vec{\mathbf{x}}) = r^\alpha f(\vec{\mathbf{x}})$. Als $r \downarrow 0$

Homogeniteit en limiet

Definitie (Syllabus 7.14)

We noemen $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ homogeen van graad α als voor elke $\vec{\mathbf{x}} \neq 0$ en $r > 0$ geldt

$$f(r\vec{\mathbf{x}}) = r^\alpha f(\vec{\mathbf{x}}).$$

Propositie (Syllabus 7.15)

Zij $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ continu, homogeen van graad α en niet constant. Dan is $\lim_{\vec{\mathbf{x}} \to \vec{\mathbf{0}}} f(\vec{\mathbf{x}}) = 0$ als $\alpha > 0$ en bestaat deze limiet niet als $\alpha \leq 0$.

Bewijs, vervolg: stel $\alpha < 0$.

- Neem $\vec{\mathbf{x}}$ zodat $f(\vec{\mathbf{x}}) \neq 0$.
- Dan is $f(r\vec{\mathbf{x}}) = r^\alpha f(\vec{\mathbf{x}})$. Als $r \downarrow 0$ gaat dit naar $\pm\infty$.

Homogeniteit en limiet

Definitie (Syllabus 7.14)

We noemen $f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ homogeen van graad α als voor elke $\vec{\mathbf{x}} \neq 0$ en $r > 0$ geldt

$$f(r\vec{\mathbf{x}}) = r^\alpha f(\vec{\mathbf{x}}).$$

Propositie (Syllabus 7.15)

Zij $f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ continu, homogeen van graad α en niet constant. Dan is $\lim_{\vec{\mathbf{x}} \to \vec{\mathbf{0}}} f(\vec{\mathbf{x}}) = 0$ als $\alpha > 0$ en bestaat deze limiet niet als $\alpha \leq 0$.

Bewijs, vervolg: stel $\alpha < 0$.

- Neem $\vec{\mathbf{x}}$ zodat $f(\vec{\mathbf{x}}) \neq 0$.
- Dan is $f(r\vec{\mathbf{x}}) = r^\alpha f(\vec{\mathbf{x}})$. Als $r \downarrow 0$ gaat dit naar $\pm\infty$.

Bekijk ten slotte $\alpha = 0$.

Homogeniteit en limiet

Definitie (Syllabus 7.14)

We noemen $f\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ homogeen van graad α als voor elke $\vec{\mathbf{x}} \neq 0$ en $r > 0$ geldt

$$f(r\vec{\mathbf{x}}) = r^\alpha f(\vec{\mathbf{x}}).$$

Propositie (Syllabus 7.15)

Zij $f\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ continu, homogeen van graad α en niet constant. Dan is $\lim_{\vec{\mathbf{x}}\to\vec{\mathbf{0}}} f(\vec{\mathbf{x}}) = 0$ als $\alpha > 0$ en bestaat deze limiet niet als $\alpha \leq 0$.

Bewijs, vervolg: stel $\alpha < 0$.

- Neem $\vec{\mathbf{x}}$ zodat $f(\vec{\mathbf{x}}) \neq 0$.
- Dan is $f(r\vec{\mathbf{x}}) = r^\alpha f(\vec{\mathbf{x}})$. Als $r \downarrow 0$ gaat dit naar $\pm\infty$.

Bekijk ten slotte $\alpha = 0$. Dan geldt $f(r\vec{\mathbf{x}}) = f(\vec{\mathbf{x}})$.

Homogeniteit en limiet

Definitie (Syllabus 7.14)

We noemen $f\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ homogeen van graad α als voor elke $\vec{\mathbf{x}} \neq 0$ en $r > 0$ geldt

$$f(r\vec{\mathbf{x}}) = r^{\alpha} f(\vec{\mathbf{x}}).$$

Propositie (Syllabus 7.15)

Zij $f\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ continu, homogeen van graad α en niet constant. Dan is $\lim_{\vec{\mathbf{x}} \to \vec{\mathbf{0}}} f(\vec{\mathbf{x}}) = 0$ als $\alpha > 0$ en bestaat deze limiet niet als $\alpha \leq 0$.

Bewijs, vervolg: stel $\alpha < 0$.

- Neem $\vec{\mathbf{x}}$ zodat $f(\vec{\mathbf{x}}) \neq 0$.
- Dan is $f(r\vec{\mathbf{x}}) = r^{\alpha} f(\vec{\mathbf{x}})$. Als $r \downarrow 0$ gaat dit naar $\pm\infty$.

Bekijk ten slotte $\alpha = 0$. Dan geldt $f(r\vec{\mathbf{x}}) = f(\vec{\mathbf{x}})$.

- Neem $\vec{\mathbf{x}}$ en $\vec{\mathbf{y}}$ zodat $f(\vec{\mathbf{x}}) \neq f(\vec{\mathbf{y}})$.

Homogeniteit en limiet

Definitie (Syllabus 7.14)

We noemen $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ homogeen van graad α als voor elke $\vec{\mathbf{x}} \neq 0$ en $r > 0$ geldt

$$f(r\vec{\mathbf{x}}) = r^\alpha f(\vec{\mathbf{x}}).$$

Propositie (Syllabus 7.15)

Zij $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ continu, homogeen van graad α en niet constant. Dan is $\lim_{\vec{\mathbf{x}} \to \vec{\mathbf{0}}} f(\vec{\mathbf{x}}) = 0$ als $\alpha > 0$ en bestaat deze limiet niet als $\alpha \leq 0$.

Bewijs, vervolg: stel $\alpha < 0$.

- Neem $\vec{\mathbf{x}}$ zodat $f(\vec{\mathbf{x}}) \neq 0$.
- Dan is $f(r\vec{\mathbf{x}}) = r^\alpha f(\vec{\mathbf{x}})$. Als $r \downarrow 0$ gaat dit naar $\pm\infty$.

Bekijk ten slotte $\alpha = 0$. Dan geldt $f(r\vec{\mathbf{x}}) = f(\vec{\mathbf{x}})$.

- Neem $\vec{\mathbf{x}}$ en $\vec{\mathbf{y}}$ zodat $f(\vec{\mathbf{x}}) \neq f(\vec{\mathbf{y}})$.
- Dan geldt $\lim_{r \downarrow 0} f(r\vec{\mathbf{x}})$

Homogeniteit en limiet

Definitie (Syllabus 7.14)

We noemen $f\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ homogeen van graad α als voor elke $\vec{\mathbf{x}} \neq 0$ en $r > 0$ geldt

$$f(r\vec{\mathbf{x}}) = r^\alpha f(\vec{\mathbf{x}}).$$

Propositie (Syllabus 7.15)

Zij $f\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ continu, homogeen van graad α en niet constant. Dan is $\lim_{\vec{\mathbf{x}}\to\vec{\mathbf{0}}} f(\vec{\mathbf{x}}) = 0$ als $\alpha > 0$ en bestaat deze limiet niet als $\alpha \leq 0$.

Bewijs, vervolg: stel $\alpha < 0$.

- Neem $\vec{\mathbf{x}}$ zodat $f(\vec{\mathbf{x}}) \neq 0$.
- Dan is $f(r\vec{\mathbf{x}}) = r^\alpha f(\vec{\mathbf{x}})$. Als $r \downarrow 0$ gaat dit naar $\pm\infty$.

Bekijk ten slotte $\alpha = 0$. Dan geldt $f(r\vec{\mathbf{x}}) = f(\vec{\mathbf{x}})$.

- Neem $\vec{\mathbf{x}}$ en $\vec{\mathbf{y}}$ zodat $f(\vec{\mathbf{x}}) \neq f(\vec{\mathbf{y}})$.
- Dan geldt $\lim_{r\downarrow 0} f(r\vec{\mathbf{x}}) = f(\vec{\mathbf{x}})$

Homogeniteit en limiet

Definitie (Syllabus 7.14)

We noemen $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ homogeen van graad α als voor elke $\vec{\mathbf{x}} \neq 0$ en $r > 0$ geldt

$$f(r\vec{\mathbf{x}}) = r^\alpha f(\vec{\mathbf{x}}).$$

Propositie (Syllabus 7.15)

Zij $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ continu, homogeen van graad α en niet constant. Dan is $\lim_{\vec{\mathbf{x}} \to \vec{\mathbf{0}}} f(\vec{\mathbf{x}}) = 0$ als $\alpha > 0$ en bestaat deze limiet niet als $\alpha \leq 0$.

Bewijs, vervolg: stel $\alpha < 0$.

- Neem $\vec{\mathbf{x}}$ zodat $f(\vec{\mathbf{x}}) \neq 0$.
- Dan is $f(r\vec{\mathbf{x}}) = r^\alpha f(\vec{\mathbf{x}})$. Als $r \downarrow 0$ gaat dit naar $\pm\infty$.

Bekijk ten slotte $\alpha = 0$. Dan geldt $f(r\vec{\mathbf{x}}) = f(\vec{\mathbf{x}})$.

- Neem $\vec{\mathbf{x}}$ en $\vec{\mathbf{y}}$ zodat $f(\vec{\mathbf{x}}) \neq f(\vec{\mathbf{y}})$.
- Dan geldt $\lim_{r\downarrow 0} f(r\vec{\mathbf{x}}) = f(\vec{\mathbf{x}})$ en $\lim_{r\downarrow 0} f(r\vec{\mathbf{y}})$

Homogeniteit en limiet

Definitie (Syllabus 7.14)

We noemen $f\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ homogeen van graad α als voor elke $\vec{\mathbf{x}} \neq 0$ en $r > 0$ geldt

$$f(r\vec{\mathbf{x}}) = r^\alpha f(\vec{\mathbf{x}}).$$

Propositie (Syllabus 7.15)

Zij $f\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ continu, homogeen van graad α en niet constant. Dan is $\lim_{\vec{\mathbf{x}}\to\vec{\mathbf{0}}} f(\vec{\mathbf{x}}) = 0$ als $\alpha > 0$ en bestaat deze limiet niet als $\alpha \leq 0$.

Bewijs, vervolg: stel $\alpha < 0$.

- Neem $\vec{\mathbf{x}}$ zodat $f(\vec{\mathbf{x}}) \neq 0$.
- Dan is $f(r\vec{\mathbf{x}}) = r^\alpha f(\vec{\mathbf{x}})$. Als $r \downarrow 0$ gaat dit naar $\pm\infty$.

Bekijk ten slotte $\alpha = 0$. Dan geldt $f(r\vec{\mathbf{x}}) = f(\vec{\mathbf{x}})$.

- Neem $\vec{\mathbf{x}}$ en $\vec{\mathbf{y}}$ zodat $f(\vec{\mathbf{x}}) \neq f(\vec{\mathbf{y}})$.
- Dan geldt $\lim_{r\downarrow 0} f(r\vec{\mathbf{x}}) = f(\vec{\mathbf{x}})$ en $\lim_{r\downarrow 0} f(r\vec{\mathbf{y}}) = f(\vec{\mathbf{y}})$.

Homogeniteit en limiet

Definitie (Syllabus 7.14)

We noemen $f\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ homogeen van graad α als voor elke $\vec{\mathbf{x}} \neq 0$ en $r > 0$ geldt

$$f(r\vec{\mathbf{x}}) = r^\alpha f(\vec{\mathbf{x}}).$$

Propositie (Syllabus 7.15)

Zij $f\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ continu, homogeen van graad α en niet constant. Dan is $\lim_{\vec{\mathbf{x}}\to\vec{\mathbf{0}}} f(\vec{\mathbf{x}}) = 0$ als $\alpha > 0$ en bestaat deze limiet niet als $\alpha \leq 0$.

Bewijs, vervolg: stel $\alpha < 0$.

- Neem $\vec{\mathbf{x}}$ zodat $f(\vec{\mathbf{x}}) \neq 0$.
- Dan is $f(r\vec{\mathbf{x}}) = r^\alpha f(\vec{\mathbf{x}})$. Als $r \downarrow 0$ gaat dit naar $\pm\infty$.

Bekijk ten slotte $\alpha = 0$. Dan geldt $f(r\vec{\mathbf{x}}) = f(\vec{\mathbf{x}})$.

- Neem $\vec{\mathbf{x}}$ en $\vec{\mathbf{y}}$ zodat $f(\vec{\mathbf{x}}) \neq f(\vec{\mathbf{y}})$.
- Dan geldt $\lim_{r\downarrow 0} f(r\vec{\mathbf{x}}) = f(\vec{\mathbf{x}})$ en $\lim_{r\downarrow 0} f(r\vec{\mathbf{y}}) = f(\vec{\mathbf{y}})$.
- Maar $r\vec{\mathbf{x}} \to \vec{\mathbf{0}}$ en $r\vec{\mathbf{y}} \to \vec{\mathbf{0}}$ als $r \downarrow 0$

Homogeniteit en limiet

Definitie (Syllabus 7.14)

We noemen $f\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ homogeen van graad α als voor elke $\vec{\mathbf{x}} \neq 0$ en $r > 0$ geldt

$$f(r\vec{\mathbf{x}}) = r^\alpha f(\vec{\mathbf{x}}).$$

Propositie (Syllabus 7.15)

Zij $f\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ continu, homogeen van graad α en niet constant. Dan is $\lim_{\vec{\mathbf{x}}\to\vec{\mathbf{0}}} f(\vec{\mathbf{x}}) = 0$ als $\alpha > 0$ en bestaat deze limiet niet als $\alpha \leq 0$.

Bewijs, vervolg: stel $\alpha < 0$.

- Neem $\vec{\mathbf{x}}$ zodat $f(\vec{\mathbf{x}}) \neq 0$.
- Dan is $f(r\vec{\mathbf{x}}) = r^\alpha f(\vec{\mathbf{x}})$. Als $r \downarrow 0$ gaat dit naar $\pm\infty$.

Bekijk ten slotte $\alpha = 0$. Dan geldt $f(r\vec{\mathbf{x}}) = f(\vec{\mathbf{x}})$.

- Neem $\vec{\mathbf{x}}$ en $\vec{\mathbf{y}}$ zodat $f(\vec{\mathbf{x}}) \neq f(\vec{\mathbf{y}})$.
- Dan geldt $\lim_{r\downarrow 0} f(r\vec{\mathbf{x}}) = f(\vec{\mathbf{x}})$ en $\lim_{r\downarrow 0} f(r\vec{\mathbf{y}}) = f(\vec{\mathbf{y}})$.
- Maar $r\vec{\mathbf{x}} \to \vec{\mathbf{0}}$ en $r\vec{\mathbf{y}} \to \vec{\mathbf{0}}$ als $r \downarrow 0$, dus als $\lim_{\vec{\mathbf{x}}\to\vec{\mathbf{0}}} f(\vec{\mathbf{x}})$ bestaat

Homogeniteit en limiet

Definitie (Syllabus 7.14)

We noemen $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ homogeen van graad α als voor elke $\vec{\mathbf{x}} \neq 0$ en $r > 0$ geldt

$$f(r\vec{\mathbf{x}}) = r^\alpha f(\vec{\mathbf{x}}).$$

Propositie (Syllabus 7.15)

Zij $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ continu, homogeen van graad α en niet constant. Dan is $\lim_{\vec{\mathbf{x}} \to \vec{\mathbf{0}}} f(\vec{\mathbf{x}}) = 0$ als $\alpha > 0$ en bestaat deze limiet niet als $\alpha \leq 0$.

Bewijs, vervolg: stel $\alpha < 0$.

- Neem $\vec{\mathbf{x}}$ zodat $f(\vec{\mathbf{x}}) \neq 0$.
- Dan is $f(r\vec{\mathbf{x}}) = r^\alpha f(\vec{\mathbf{x}})$. Als $r \downarrow 0$ gaat dit naar $\pm\infty$.

Bekijk ten slotte $\alpha = 0$. Dan geldt $f(r\vec{\mathbf{x}}) = f(\vec{\mathbf{x}})$.

- Neem $\vec{\mathbf{x}}$ en $\vec{\mathbf{y}}$ zodat $f(\vec{\mathbf{x}}) \neq f(\vec{\mathbf{y}})$.
- Dan geldt $\lim_{r \downarrow 0} f(r\vec{\mathbf{x}}) = f(\vec{\mathbf{x}})$ en $\lim_{r \downarrow 0} f(r\vec{\mathbf{y}}) = f(\vec{\mathbf{y}})$.
- Maar $r\vec{\mathbf{x}} \to \vec{\mathbf{0}}$ en $r\vec{\mathbf{y}} \to \vec{\mathbf{0}}$ als $r \downarrow 0$, dus als $\lim_{\vec{\mathbf{x}} \to \vec{\mathbf{0}}} f(\vec{\mathbf{x}})$ bestaat moet gelden

$$\lim_{r \downarrow 0} f(r\vec{\mathbf{x}}) = \lim_{\vec{\mathbf{x}} \to \vec{\mathbf{0}}} f(\vec{\mathbf{x}}) = \lim_{r \downarrow 0} f(r\vec{\mathbf{y}}).$$