OPGAVEN BIJ ANALYSE 2015, CONTINUE FUNCTIES IN METRISCHE RUIMTEN (13)

Resultaten

Definitie. Zij (S,d) en (S^*,d^*) metrische ruimtes en $f\colon S \to S^*$ een functie. We noemen f *continu* in $s_0 \in S$ als

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{zodat} \quad d(s,s_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad d^*\big(f(s), f(s_0)\big) < \epsilon.$$

Lemma. *De projecties $\pi_j\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ gegeven door $\pi_j(\vec{x}) = x_j$ zijn continue afbeeldingen. Sommen, producten en quotiënten van continue afbeeldingen zijn continu.*

Stelling. *Zij (S,d) een metrische ruimte en $f_1,\ldots,f_k\colon S \to \mathbb{R}$ afbeeldingen. Definieer $f\colon S \to \mathbb{R}^k$ door $f(s) = \big(f_1(s),\ldots,f_k(s)\big)$. Dan is f continu desda alle f_j dat zijn.*

Definitie. Zij $f\colon S \to S^*$ een functie. Zij $s_0 \in S$. We schrijven

$$\lim_{s \to s_0} f(s) = L$$

voor zekere $L \in S^*$ als voor elke $\epsilon > 0$ er een $\delta > 0$ bestaat zodat $d\big(f(s), L\big) < \epsilon$ geldt als $d(s,s_0) < \delta$.

Opgaven

Opgave 1. Zij (S_1,d_1), (S_2,d_2) en (S_3,d_3) metrische ruimten en $f\colon S_1 \to S_2$, $g\colon S_2 \to S_3$ continue afbeeldingen. Bewijs dat $g \circ f\colon S_1 \to S_3$ continu is.

Opgave 2. Zij $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ een lineaire afbeelding: $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ voor een zekere matrix $n \times m$-matrix A. Bewijs dat f continu is.

Opgave 3. Zij $f\colon S \to S^*$ een continue afbeelding van metrische ruimten en $s_0 \in S$. Bewijs dat de volgende uitspraken equivalent zijn:

(1) f is continu in s_0,
(2) $\lim_{s \to s_0} f(s) = f(s_0)$,
(3) voor elke rij (s_n) met $\lim_{n\to\infty} s_n = s_0$ geldt $\lim_{n\to\infty} f(s_n) = f(s_0)$.

Opgave 4. Zij $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Stel dat $\lim_{\vec{x} \to \vec{0}} f(\vec{x}) = L$. Neem $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ vast. Bewijs dat voor $t \in \mathbb{R}$ geldt

$$\lim_{t \to 0} f(t\vec{x}_0) = L.$$

Opgave 5. Zij S een vectorruimte en $\|\cdot\|$ een norm op S. Definieer $d(s,t) = \|s-t\|$ voor $s,t \in S$. Bewijs dat d een metriek is.