Analyse: van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}^n$ hoorcollege

Limieten van functies (14)

Gerrit Oomens

G.Oomens@uva.nl

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica
Universiteit van Amsterdam

Limieten en functies

Definitie

Zij $f: S \to S^*$ een functie. Zij $s_0 \in S$. We schrijven

$$\lim_{s \to s_0} f(s) = L$$

voor zekere $L \in S^*$ als voor elke $\epsilon > 0$ er een $\delta > 0$ bestaat zodat $d^*\big(f(s), L\big) < \epsilon$ geldt als $d(s, s_0) < \delta$.

Merk op: equivalent zijn

1. f continu in s_0,
2. $\lim_{s \to s_0} f(s) = f(s_0)$,
3. voor elke rij $s_n \to s_0$ geldt $f(s_n) \to f(s_0)$.

Situatie

In het vervolg zullen we ons beperken tot functies van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}^m$. Vaak, maar niet altijd, is $n = 2$ en $m = 1$. We gebruiken op $\mathbb{R}^k$ de metriek

$$d(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} (x_j - y_j)^2} = \|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{y}}\|$$

afkomstig van de bijbehorende Euclidische norm

$$\|\vec{\mathbf{x}}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} x_j^2}.$$

Voor een functie $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ betekent een limiet als

$$\lim_{\vec{\mathbf{x}} \to \vec{\mathbf{0}}} f(\vec{\mathbf{x}}) = L$$

dat voor alle $\epsilon > 0$ er $\delta > 0$ is zodat $|f(\vec{\mathbf{x}}) - L| < \epsilon$ als $\|\vec{\mathbf{x}}\| < \delta$.

Oftewel: $f(\vec{\mathbf{x}})$ gaat naar L als $\vec{\mathbf{x}}$ nadert, onafhankelijk van de richting.

Homogeniteit

Definitie (Syllabus 7.14)

We noemen $f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ homogeen van graad α als voor elke $\vec{\mathbf{x}} \neq 0$ en $r > 0$ geldt

$$f(r\vec{\mathbf{x}}) = r^\alpha f(\vec{\mathbf{x}}).$$

Bekijk op $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ de functies

$$f_1(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^4 + y^4}, \qquad f_2(x, y) = \sin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right), \qquad f_3(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}.$$

Deze zijn homogeen, met graden -2, 0 en 1.

Homogeniteit en limiet

Definitie (Syllabus 7.14)

We noemen $f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ homogeen van graad α als voor elke $\vec{\mathbf{x}} \neq 0$ en $r > 0$ geldt

$$f(r\vec{\mathbf{x}}) = r^\alpha f(\vec{\mathbf{x}}).$$

Propositie (Syllabus 7.15)

Zij $f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ continu, homogeen van graad α en niet constant. Dan is $\lim_{\vec{\mathbf{x}}\to\vec{\mathbf{0}}} f(\vec{\mathbf{x}}) = 0$ als $\alpha > 0$ en bestaat deze limiet niet als $\alpha \leq 0$.

Bewijs: stel $\alpha > 0$.

- De sfeer $S^{n-1} = \{\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{\mathbf{x}}\| = 1\}$ is gesloten en begrensd in $\mathbb{R}^n$, dus compact.
- Dan is f begrensd op S^{n-1}: er is M zodat voor alle $\|\vec{\mathbf{x}}\| \in S^{n-1}$ geldt $|f(\vec{\mathbf{x}})| \leq M$.
- Voor $\vec{\mathbf{x}}$ willekeurig kunnen we schrijven $\vec{\mathbf{z}} = \frac{\vec{\mathbf{x}}}{\|\vec{\mathbf{x}}\|}$, zodat $\|\vec{\mathbf{z}}\| = 1$ en $\vec{\mathbf{x}} = \|\vec{\mathbf{x}}\|\vec{\mathbf{z}}$. Dan

$$|f(\vec{\mathbf{x}})| = \left|f\left(\|\vec{\mathbf{x}}\| \cdot \vec{\mathbf{z}}\right)\right| = \|\vec{\mathbf{x}}\|^\alpha \cdot |f(\vec{\mathbf{z}})| \leq M\|\vec{\mathbf{x}}\|^\alpha.$$

- Dus omdat $\alpha > 0$ zien we dat $f(\vec{\mathbf{x}}) \to 0$ als $\vec{\mathbf{x}} \to 0$.

Homogeniteit en limiet

Definitie (Syllabus 7.14)

We noemen $f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ homogeen van graad α als voor elke $\vec{\mathbf{x}} \neq 0$ en $r > 0$ geldt

$$f(r\vec{\mathbf{x}}) = r^\alpha f(\vec{\mathbf{x}}).$$

Propositie (Syllabus 7.15)

Zij $f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ continu, homogeen van graad α en niet constant. Dan is $\lim_{\vec{\mathbf{x}}\to\vec{\mathbf{0}}} f(\vec{\mathbf{x}}) = 0$ als $\alpha > 0$ en bestaat deze limiet niet als $\alpha \leq 0$.

Bewijs, vervolg: stel $\alpha < 0$.

- Neem $\vec{\mathbf{x}}$ zodat $f(\vec{\mathbf{x}}) \neq 0$.
- Dan is $f(r\vec{\mathbf{x}}) = r^\alpha f(\vec{\mathbf{x}})$. Als $r \downarrow 0$ gaat dit naar $\pm\infty$.

Bekijk ten slotte $\alpha = 0$. Dan geldt $f(r\vec{\mathbf{x}}) = f(\vec{\mathbf{x}})$.

- Neem $\vec{\mathbf{x}}$ en $\vec{\mathbf{y}}$ zodat $f(\vec{\mathbf{x}}) \neq f(\vec{\mathbf{y}})$.
- Dan geldt $\lim_{r\downarrow 0} f(r\vec{\mathbf{x}}) = f(\vec{\mathbf{x}})$ en $\lim_{r\downarrow 0} f(r\vec{\mathbf{y}}) = f(\vec{\mathbf{y}})$.
- Maar $r\vec{\mathbf{x}} \to \vec{\mathbf{0}}$ en $r\vec{\mathbf{y}} \to \vec{\mathbf{0}}$ als $r \downarrow 0$, dus als $\lim_{\vec{\mathbf{x}}\to\vec{\mathbf{0}}} f(\vec{\mathbf{x}})$ bestaat moet gelden

$$\lim_{r\downarrow 0} f(r\vec{\mathbf{x}}) = \lim_{\vec{\mathbf{x}}\to\vec{\mathbf{0}}} f(\vec{\mathbf{x}}) = \lim_{r\downarrow 0} f(r\vec{\mathbf{y}}).$$

Limieten bij nul

Bekijk voor $(x, y) \neq (0, 0)$ de functie

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}.$$

Er geldt

$$f(rx, ry) = \frac{r^3xy^2}{r^2x^2 + r^4y^4} = r\frac{xy^2}{x^2 + r^2y^4} \to 0 \qquad \text{als} \qquad r \downarrow 0.$$

Dit geldt voor alle $(x, y) \neq (0, 0)$, maar

$$f(y^2, y) = \frac{y^4}{y^4 + y^4} = \frac{1}{2},$$

dus $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ bestaat niet.

Wat gebeurt er bij $f(x, y) = \frac{x^3y^2}{x^2+y^4}$?