OPGAVEN BIJ ANALYSE 2015, DIFFERENTIËREN IN $\mathbb{R}^n$ (16)

Resultaten

Stelling. *Zij $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ totaal differentieerbaar. Dan geldt*

(1) $f'(\vec{a}) = \begin{bmatrix} D_1 f(\vec{a}) & D_2 f(\vec{a}) & \cdots & D_k f(\vec{a}) \end{bmatrix}$,

(2) $D_{\vec{u}} f(\vec{a}) = f'(a)\vec{u}$ voor alle $\vec{u} \in \mathbb{R}^k$.

Als $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ totaal differentieerbaar is, dan zijn de rijen van $f'(a)$ de totale afgeleides van de componenten $f_j\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ van f.

Opgaven

Opgave 1. Bekijk wederom $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$. Herinner dat voor $\vec{u} = (x,y)$ geldt dat $D_{\vec{u}} f(0,0) = y^2/x$ voor $x \neq 0$ en $D_{\vec{u}}(0,0) = 0$ als $x = 0$. Bewijs dat f niet totaal differentieerbaar is in 0.

Opgave 2. Bewijs de volgende claim uit het college: als $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ een vectorwaardige functie is zodat $f = o(\|\vec{h}\|)$ voor $\vec{h} \to \vec{0}$, dan zijn de componenten $f_1, \ldots, f_\ell$ van f ook $o(\|\vec{h}\|)$.

Opgave 3. Zij $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continu en homogeen van graad $\alpha > 0$.

(a) Bewijs dat $f(\vec{0}) = 0$.

(b) Bewijs dat f differentieerbaar is met afgeleide $\vec{0}$ als $\alpha > 1$.

(c) Stel dat f niet identiek gelijk aan 0 is. Bewijs dat voor $\alpha \in (0,1)$ en $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ de richtingsafgeleide $D_{\vec{u}} f(\vec{0})$ niet bestaat. Concludeer dat f niet differentieerbaar is in $\vec{0}$.

Opgave 4. Bekijk de volgende functies $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ met $f(0,0) = 0$. Ga van elke functie na of deze (i) continu is in $\vec{0}$ en (ii) differentieerbaar is in $\vec{0}$.

(a) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}$

(b) $f(x,y) = \dfrac{x^3 - y^3}{x^2+y^2}$

(c) $f(x,y) = xy \sin \dfrac{1}{x^2+y^2}$

(d) $f(x,y) = \dfrac{x^2 \sin y^2}{x^2+y^4}$

(e) $f(x,y) = \dfrac{x^3}{x^2 + (x^2+y^2)^2}$

(f) $f(x,y) = x^2 \log(x^4 + y^2)$

Opgave 5. Zij $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ differentieerbaar in $\vec{a}$.

(a) Bewijs dat voor $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, de functie $\lambda f + \mu g$ ook totaal differentieerbaar is in $\vec{a}$ met afgeleide $\lambda f'(\vec{a}) + \mu g'(\vec{a})$.

(b) Neem nu $m = 1$. Bewijs dat fg differentieerbaar is in $\vec{a}$ en dat de afgeleide gegeven wordt door de productregel: $(fg)'(\vec{a}) = g(\vec{a})f'(\vec{a}) + f(\vec{a})g'(\vec{a})$.

Opgave 6. Ga van de volgende functies $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ na of ze differentieerbaar zijn in $\vec{0}$:

(a) $f(x,y) = \log(1 + x^2y^2)$

(b) $f(x,y) = \log(1 + |xy|)$

(c) $f(x,y) = \log(1 + \sqrt{|xy|})$