OPGAVEN BIJ ANALYSE 2015, DIFFERENTIËREN IN $\mathbb{R}^n$ (17)

Resultaten

Definitie. De *operatornorm* van een lineaire afbeelding $L : V \to W$ tussen genormeerde vectorruimtes is gedefinieerd als $\|L\| := \sup_{v\neq 0} \frac{\|Lv\|}{\|v\|} = \sup_{\|v\|=1} \|Lv\|$.

Definitie. Zij $E \subseteq \mathbb{R}^k$ open en $f\colon E \to \mathbb{R}^\ell$ een differentieerbare functie. We zeggen dat f *continu differentieerbaar* is op E als $f'\colon E \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^\ell)$ continu is.

Stelling (8.30)**.** *Zij $E \subseteq \mathbb{R}^k$ open en $f\colon E \to \mathbb{R}^\ell$. Dan is f continu differentieerbaar op E desda alle partiële afgeleides van f bestaan en continu zijn op E.*

Opgaven

Opgave 1. Zij $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ een lineaire afbeelding.

(a) Bewijs dat $\|L\| = 1$ als L orthogonaal is.
(b) Stel dat $n = m$ en dat L symmetrisch is met eigenwaarden $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Bewijs dat $\|L\| = \max_j |\lambda_j|$.

Opgave 2. Zij $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ een functie, dus $f = (f_1, \dots, f_n)^\top$ waar $f_i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(1) Bewijs dat f differentieerbaar is in $a \in \mathbb{R}$ desda alle f_i dat zijn.
(2) Bewijs dat f continu differentieerbaar is op $E \subseteq \mathbb{R}$ desda alle f_i dat zijn.

Opgave 3. Bekijk de volgende functies $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ met $f(0,0) = 0$:

(a) $f(x,y) = \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$

(b) $f(x,y) = \dfrac{x^4}{x^2+y^2}$

(c) $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2+y^4}$

(d) $f(x,y) = \dfrac{x^3}{x^2+y^4}$

Beantwoord voor elk van deze functies de volgende vragen:

(i) Is f continu in $\vec{0}$?
(ii) Bestaan de partiële afgeleiden $D_i f$ in $\vec{0}$?
(iii) Voor elke $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ bestaat de richtingsafgeleide $D_{\vec{u}}(\vec{0})$?
(iv) Is f differentieerbaar in $\vec{0}$?
(v) Is f een C^1-functie?

Opgave 4. Bekijk $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\log(1+x^2y^2)}{x^2}, & \text{als } x \neq 0 \\ y^2 & \text{als } x = 0. \end{cases}$$

Toon aan dat f een C^1 functie is en bereken f'.

Opgave 5.

(a) Bewijs dat $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(\vec{x}) = \|\vec{x}\|$ differentieerbaar is buiten $\vec{0}$ en niet differentieerbaar is in $\vec{0}$. Bewijs ook dat $f'(\vec{a}) = \vec{a}/\|\vec{a}\|$.
(b) Bekijk $f(\vec{x}) = \|\vec{x}\|^2$. Bereken $f'(\vec{a})$.
(c) Zij $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ een functie zodat $\|f(\vec{x})\| \leq C\|\vec{x}\|^2$ voor zekere $C > 0$. Toon aan dat f differentieerbaar is in $\vec{0}$. Wat is $f'(\vec{0})$?

Opgaven bij het bewijs van Stelling 8.30

Opgave 6. Bewijs dat de functie $g_j\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd in het bewijs (zie slides of video) differentieerbaar is rond 0 met $g_j'(t) = D_j f(\vec{a} + \vec{v}_{j-1} + t\vec{e}_j)$.

Opgave 7. Bewijs dat de vector $\vec{x}_j$ gedefinieerd in het bewijs (zie slides of video) voldoet aan $\|\vec{x}_j - \vec{a}\| \leq \|\vec{h}\|$.