Analyse: van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}^n$ hoorcollege

Kettingregel en hogere orde afgeleides (18)

Gerrit Oomens
G.Oomens@uva.nl

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica
Universiteit van Amsterdam

Kettingregel

Stelling 9.1

Zij $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ differentieerbaar in $\vec{\mathbf{a}}$ en $g : \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^m$ differentieerbaar in $f(\vec{\mathbf{a}})$. Dan is $g \circ f$ differentieerbaar in $\vec{\mathbf{a}}$ met $(g \circ f)'(\vec{\mathbf{a}}) = g'\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big)f'(\vec{\mathbf{a}})$.

Bewijs: we hebben $f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) = f(\vec{\mathbf{a}}) + f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)$. Dus

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) &= g\big(f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}})\big) \\
&= g\big(f(\vec{\mathbf{a}}) + f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big) \\
&= g\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big) + g'\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big)\big(f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big) \\
&\qquad + o\big(\big\|f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big\|\big) \\
&= (g \circ f)(\vec{\mathbf{a}}) + g'\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big)f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|) + o\big(O(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big) \\
&= (g \circ f)(\vec{\mathbf{a}}) + g'\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big)f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|) + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)
\end{aligned}$$

We gebruiken $g\big(f(\vec{\mathbf{a}}) + \vec{\mathbf{k}}\big) = g\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big) + g'\big(f(\vec{\mathbf{a}})\big)\vec{\mathbf{k}} + o(\|\vec{\mathbf{k}}\|)$ en $o\big(O(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big) = o(\|\vec{\mathbf{h}}\|)$:

$$\frac{\big|o\big(O(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big)\big|}{\|\vec{\mathbf{h}}\|} = \left|\frac{o\big(O(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big)}{O(\|\vec{\mathbf{h}}\|)}\,\frac{O(\|\vec{\mathbf{h}}\|)}{\|\vec{\mathbf{h}}\|}\right| \le C\left|\frac{o\big(O(\|\vec{\mathbf{h}}\|)\big)}{O(\|\vec{\mathbf{h}}\|)}\right| \to 0 \quad \text{als} \quad \vec{\mathbf{h}} \to \vec{\mathbf{0}}.$$

□

Voorbeeld: kettingregel

Bekijk $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Zij $h(t) = g\big(f_1(t), f_2(t)\big)$. Dan is $h = g \circ f$ met $f = (f_1, f_2)$. Er geldt

$$h'(t) = (g \circ f)'(t) = g'\big(f(t)\big)f'(t).$$

Merk op

$$g'(x, y) = \begin{bmatrix} D_1g(x, y) & D_2g(x, y) \end{bmatrix}, \qquad f'(t) = \begin{bmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \end{bmatrix}.$$

Dus

$$\begin{aligned}
h'(t) &= \begin{bmatrix} D_1g\big(f_1(t), f_2(t)\big) & D_2g\big(f_1(t), f_2(t)\big) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \end{bmatrix} \\
&= D_1g\big(f_1(t), f_2(t)\big)f_1'(t) + D_2g\big(f_1(t), f_2(t)\big)f_2'(t).
\end{aligned}$$

Oftewel "$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial g}{\partial x}\frac{df_1}{dt} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{df_2}{dt}$".

Afgeleides van afgeleides

Bekijk $f : E \to \mathbb{R}$, waar $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Stel dat de partiële afgeleides van f bestaan op E.

- Een partiële afgeleide D_jf is weer een functie $E \to \mathbb{R}$.
- Als D_jf partieel differentieerbaar is in $\vec{\mathbf{a}}$, dan bestaat de partiële afgeleide van de tweede orde van f in $\vec{\mathbf{a}}$:

  $$D_{ij}f(\vec{\mathbf{a}}) := \big(D_i(D_jf)\big)(\vec{\mathbf{a}})$$

- Zo kunnen we doorgaan:

  $$(D_{j_1\cdots j_k}f)(\vec{\mathbf{a}}) = (D_{j_1}D_{j_2}\cdots D_{j_k}f)(\vec{\mathbf{a}})$$

  is een k-de orde partiële afgeleide van f, als deze bestaat.
- Als alle k-de orde partiële afgeleides van f continu zijn op E, zeggen we dat f een C^k afbeelding is op E.

Men schrijft ook wel $\frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1}\cdots\partial x_{j_k}}$ voor $D_{j_1\cdots j_k}f$.

Tweede-orde partiële afgeleides

Voorbeeld: bekijk $f(x,y) = x^3y + xy$. Dan is

$$D_1f(x,y) = 3x^2y + y, \qquad D_2f(x,y) = x^3 + x$$

$$D_{11}f(x,y) = 6xy \qquad D_{12}f(x,y) = 3x^2 + 1$$
$$D_{21}f(x,y) = 3x^2 + 1 \qquad D_{22}f(x,y) = 0.$$

We zien $D_{12}f = D_{21}f$: de volgorde van differentiëren maakt niet uit. Dit is meestal, maar niet altijd, waar:

Stelling 11.13

Zij $E \subseteq \mathbb{R}^n$ open en $f: E \to \mathbb{R}$ een C^2-afbeelding. Dan geldt voor alle $i,j \in \{1,\ldots,n\}$ en voor alle $\vec{\mathbf{a}} \in E$ dat

$$D_{ij}f(\vec{\mathbf{a}}) = D_{ji}(\vec{\mathbf{a}}).$$

Omwisselen van afgeleides

Propositie 11.11

Zij $f: E \to \mathbb{R}$ een C^2-functie en $(a,b) \in E$. Dan geldt $D_{12}f(a,b) = D_{21}f(a,b)$.

- Neem (h,k) klein en bekijk
$$\begin{aligned}\Delta = f(a+h,b+k) - f(a+h,b) - f(a,b+k) + f(a,b)\\ = g(a+h) - g(a)\\ = g'(\xi_1)h = \big(D_1f(\xi_1,b+k) - D_1f(\xi_1,b)\big)h\end{aligned}$$
met $g(x) = f(x,b+k) - f(x,b)$, voor zekere $\xi_1 \in (a,a+h)$.
- Net zo is $D_1f(\xi_1,b+k) - D_1f(\xi_1,b) = D_{21}f(\xi_1,\xi_2)k$ met $\xi_2 \in (b,b+k)$.
- We zien $\Delta = D_{21}f(\xi_1,\xi_2)hk$.
- We kunnen deze redering herhalen in de omgekeerde volgorde om in te zien dat $\Delta = D_{12}f(\eta_1,\eta_2)kh$ voor zekere $\eta_1 \in (a,a+h)$ en $\eta_2 \in (b,b+k)$.
- Dus $D_{21}f(\xi_1,\xi_2) = D_{12}f(\eta_1,\eta_2)$ voor deze $\eta_1,\eta_2,\xi_1,\xi_2$.
- Laat nu $h,k \to 0$ zodat $\xi_1,\eta_1 \to a$ en $\xi_2,\eta_2 \to b$.
- Vanwege continuïteit van D_{21} en D_{12} volgt $D_{21}f(a,b) = D_{12}f(a,b)$.

Integraal en afgeleide

Zij $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ een differentieerbare functie. Definieer voor zekere $a,b \in \mathbb{R}$ de functie

$$F(x) = \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Is dan F differentieerbaar met $F'(x) = \int_a^b D_1f(x,y)\,\mathrm{d}y$? Er geldt

$$\begin{aligned}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - \int_a^b D_1f(x,y)\,\mathrm{d}y &= \int_a^b \left[\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} - D_1f(x,y)\right]\mathrm{d}y\\ &= \int_a^b [D_1f(\xi_y,y) - D_1f(x,y)]\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

waar $\xi_y \in (x,x+h)$. Als nu D_1f continu is, dan is hij uniform continu op de compacte verzameling $F := [x,x+h] \times [a,b]$, dus bestaat er voor elke $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ zodat

$$d\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) < \delta \quad \Rightarrow \quad \big|D_1f(x_1,y_1) - D_1f(x_2,y_2)\big| < \epsilon$$

op heel F. Dus als $|h| < \delta$, dan is

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - \int_a^b D_1f(x,y)\,\mathrm{d}y\right| \le \int_a^b \epsilon\,\mathrm{d}y = (b-a)\epsilon.$$

Aangezien ϵ willekeurig is, zien we dat $\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \int_a^b D_1f(x,y)\,\mathrm{d}y$.

Integraal en afgeleide

Propositie 11.14

Zij $f: I_1 \times I_2 \to \mathbb{R}$ een C^1 functie, waar $I_1, I_2 \subseteq \mathbb{R}$ intervallen zijn. Neem $[a,b] \subseteq I_2$ en definieer

$$F(x) = \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

voor $x \in I_1$. Dan is F differentieerbaar op I_1 met

$$F'(x) = \int_a^b D_1f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$