OPGAVEN BIJ ANALYSE 2015, KETTINGREGEL EN MEER (18)

Resultaten

Stelling (Kettingregel)**.** *Zij f differentieerbaar in $\vec{a}$ en g differentieerbaar in $f(\vec{a})$. Dan is $g \circ f$ differentieerbaar in $\vec{a}$ met $(g \circ f)'(\vec{a}) = g'\big(f(\vec{a})\big)f'(\vec{a})$.*

Stelling (Volgorde van afgeleides)**.** *Zij $f \colon E \to \mathbb{R}$ een C^2-functie en $(a,b) \in E$. Dan geldt $D_{12}f(a,b) = D_{21}f(a,b)$.*

Stelling (Afgeleide en integraal)**.** *Zij $f : I_1 \times I_2 \to \mathbb{R}$ een C^1 functie, waar $I_1, I_2 \subseteq \mathbb{R}$ intervallen zijn. Neem $[a,b] \subseteq I_2$ en definieer $F(x) = \int_a^b f(x,y)\,dy$ voor $x \in I_1$. Dan is F differentieerbaar op I_1 met $F'(x) = \int_a^b D_1 f(x,y)\,dy$.*

Opgaven

Opgave 1.

(a) Definieer $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gegeven door $f(x) = (x^2, x-3)$ en $g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeven door $g(x,y) = x^2 + xy + y^2$. Bepaal $(g \circ f)'$ en $(f \circ g)'$ zowel rechtstreeks als met de kettingregel.

(b) Doe hetzelfde voor $(f \circ g)'$ waar $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gegeven wordt door $f(x,y) = (x+y, y^3, 3y+1)$ en $g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeven door $g(x,y) = (x^2+y^2, xy)$.

Opgave 2. Zij $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differentieerbaar. Gebruik de kettingregel en de functie $h \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ met $h(x,y) = x/y$ om de quotiëntregel $[f/g]' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$ te bewijzen.

Opgave 3. Zij $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differentieerbaar en definieer $F(x,y) = f(x+y, x-y)$. Druk $(D_1F)(x,y) + (D_2F)(x,y)$ uit in $(D_1f)(x+y, x-y)$ en $(D_2f)(x+y, x-y)$.

Opgave 4. Zij $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(0,0) = 0$ en

$$f(x,y) = \frac{xy^3}{x^2+y^2}$$

voor $(x,y) \neq 0$.

(a) Bewijs dat f een C^1-functie is.

(b) Bewijs dat $D_{12}f$ en $D_{21}f$ op heel $\mathbb{R}^2$ bestaan.

(c) Bewijs dat $(D_{12}f)(0,0) = 0$ en $(D_{21}f)(0,0) = 1$.

(d) Concludeer dat D_{12} en D_{21} niet beiden continu zijn in 0.

Opgave 5. We hebben gezien dat als $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ een C^2-functie is, dan voldoen $u = D_1f$ en $v = D_2f$ aan $D_2u = D_1v$. Bewijs de volgende omkering van deze bewering: zij $u, v \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continu differentieerbaar met $D_2u = D_1v$ en neem $a, b \in \mathbb{R}$, dan is

$$f(x,y) = \int_b^y v(x,t)\,\mathrm{d}t + \int_a^x u(t,b)\,\mathrm{d}t$$

een C^2-functie met $u = D_1f$ en $v = D_2f$.