Analyse: van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}^n$ hoorcollege

Taylor in $\mathbb{R}^n$ (19)

Gerrit Oomens
G.Oomens@uva.nl

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica
Universiteit van Amsterdam

Taylorreeksen in $\mathbb{R}$

Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een C^p functie.

Taylorreeksen in $\mathbb{R}$

Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een C^p functie. Dan is

$$f(h) = f(0) + f'(0)h + \frac{f''(0)h^2}{2} + \cdots + \frac{f^{(p-1)}(0)h^{p-1}}{(p-1)!} + R_p(h),$$

Taylorreeksen in $\mathbb{R}$

Zij $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een C^p functie. Dan is

$$f(h) = f(0) + f'(0)h + \frac{f''(0)h^2}{2} + \cdots + \frac{f^{(p-1)}(0)h^{p-1}}{(p-1)!} + R_p(h),$$

waar $R_p(h) = \frac{f^{(p)}(\theta)h^p}{p!}$ voor zekere θ tussen 0 en h.

Taylorreeksen in $\mathbb{R}$

Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een C^p functie. Dan is

$$f(h) = f(0) + f'(0)h + \frac{f''(0)h^2}{2} + \cdots + \frac{f^{(p-1)}(0)h^{p-1}}{(p-1)!} + R_p(h),$$

waar $R_p(h) = \frac{f^{(p)}(\theta)h^p}{p!}$ voor zekere θ tussen 0 en h.

Meer algemeen hebben we voor $a \in \mathbb{R}$

Taylorreeksen in $\mathbb{R}$

Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een C^p functie. Dan is

$$f(h) = f(0) + f'(0)h + \frac{f''(0)h^2}{2} + \cdots + \frac{f^{(p-1)}(0)h^{p-1}}{(p-1)!} + R_p(h),$$

waar $R_p(h) = \frac{f^{(p)}(\theta)h^p}{p!}$ voor zekere θ tussen 0 en h.

Meer algemeen hebben we voor $a \in \mathbb{R}$ dat

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)h^2}{2} + \cdots + \frac{f^{(p-1)}(a)h^{p-1}}{(p-1)!} + R_p(h)$$

Taylorreeksen in $\mathbb{R}$

Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een C^p functie. Dan is

$$f(h) = f(0) + f'(0)h + \frac{f''(0)h^2}{2} + \cdots + \frac{f^{(p-1)}(0)h^{p-1}}{(p-1)!} + R_p(h),$$

waar $R_p(h) = \frac{f^{(p)}(\theta)h^p}{p!}$ voor zekere θ tussen 0 en h.

Meer algemeen hebben we voor $a \in \mathbb{R}$ dat

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)h^2}{2} + \cdots + \frac{f^{(p-1)}(a)h^{p-1}}{(p-1)!} + R_p(h)$$

met $R_p(h) = \frac{f^{(p)}(\theta)h^p}{p!}$ voor zekere θ tussen a en $a + h$.

Taylorreeksen in $\mathbb{R}$

Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een C^p functie. Dan is

$$f(h) = f(0) + f'(0)h + \frac{f''(0)h^2}{2} + \cdots + \frac{f^{(p-1)}(0)h^{p-1}}{(p-1)!} + R_p(h),$$

waar $R_p(h) = \frac{f^{(p)}(\theta)h^p}{p!}$ voor zekere θ tussen 0 en h.

Meer algemeen hebben we voor $a \in \mathbb{R}$ dat

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)h^2}{2} + \cdots + \frac{f^{(p-1)}(a)h^{p-1}}{(p-1)!} + R_p(h)$$

met $R_p(h) = \frac{f^{(p)}(\theta)h^p}{p!}$ voor zekere θ tussen a en $a+h$. Als gevolg hiervan zien we

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + O(|h|^p).$$

Polynomen in meer variabelen

Een tweedegraadspolynoom op de $\mathbb{R}^2$ ziet er uit als

$$P(x_1, x_2)$$

Polynomen in meer variabelen

Een tweedegraadspolynoom op de $\mathbb{R}^2$ ziet er uit als

$$P(x_1, x_2) = a_{0,0} + a_{1,0}x_1 + a_{0,1}x_2 + a_{1,1}x_1x_2 + a_{2,0}x_1^2 + a_{0,2}x_2^2$$

Polynomen in meer variabelen

Een tweedegraadspolynoom op de $\mathbb{R}^2$ ziet er uit als

$$P(x_1, x_2) = a_{0,0} + a_{1,0}x_1 + a_{0,1}x_2 + a_{1,1}x_1x_2 + a_{2,0}x_1^2 + a_{0,2}x_2^2$$

of compacter

$$P(x_1, x_2) = \sum_{j_1+j_2\leq 2} a_{j_1,j_2}x_1^{j_1}x_2^{j_2}.$$

Polynomen in meer variabelen

Een tweedegraadspolynoom op de $\mathbb{R}^2$ ziet er uit als

$$P(x_1, x_2) = a_{0,0} + a_{1,0}x_1 + a_{0,1}x_2 + a_{1,1}x_1x_2 + a_{2,0}x_1^2 + a_{0,2}x_2^2$$

of compacter

$$P(x_1, x_2) = \sum_{j_1+j_2\leq 2} a_{j_1,j_2}x_1^{j_1}x_2^{j_2}.$$

Meer algemeen is een k-degraads polynoom op $\mathbb{R}^n$ van de vorm

$$P(x_1, \ldots, x_n)$$

Polynomen in meer variabelen

Een tweedegraadspolynoom op de $\mathbb{R}^2$ ziet er uit als

$$P(x_1, x_2) = a_{0,0} + a_{1,0}x_1 + a_{0,1}x_2 + a_{1,1}x_1x_2 + a_{2,0}x_1^2 + a_{0,2}x_2^2$$

of compacter

$$P(x_1, x_2) = \sum_{j_1+j_2\leq 2} a_{j_1,j_2}x_1^{j_1}x_2^{j_2}.$$

Meer algemeen is een k-degraads polynoom op $\mathbb{R}^n$ van de vorm

$$P(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j_1+\cdots+j_n\leq k} a_{j_1,\ldots,j_n}x_1^{j_1}\cdots x_n^{j_n}.$$

Polynomen in meer variabelen

Een tweedegraadspolynoom op de $\mathbb{R}^2$ ziet er uit als

$$P(x_1, x_2) = a_{0,0} + a_{1,0}x_1 + a_{0,1}x_2 + a_{1,1}x_1x_2 + a_{2,0}x_1^2 + a_{0,2}x_2^2$$

of compacter

$$P(x_1, x_2) = \sum_{j_1+j_2\leq 2} a_{j_1,j_2}x_1^{j_1}x_2^{j_2}.$$

Meer algemeen is een k-degraads polynoom op $\mathbb{R}^n$ van de vorm

$$P(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j_1+\cdots+j_n\leq k} a_{j_1,\ldots,j_n}x_1^{j_1}\cdots x_n^{j_n}.$$

Merk op dat geldt $D_1^{j_1}\cdots D_n^{j_n}P(\vec{\mathbf{0}})$

Polynomen in meer variabelen

Een tweedegraadspolynoom op de $\mathbb{R}^2$ ziet er uit als

$$P(x_1, x_2) = a_{0,0} + a_{1,0}x_1 + a_{0,1}x_2 + a_{1,1}x_1x_2 + a_{2,0}x_1^2 + a_{0,2}x_2^2$$

of compacter

$$P(x_1, x_2) = \sum_{j_1+j_2 \leq 2} a_{j_1,j_2} x_1^{j_1} x_2^{j_2}.$$

Meer algemeen is een k-degraads polynoom op $\mathbb{R}^n$ van de vorm

$$P(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j_1+\cdots+j_n \leq k} a_{j_1,\dots,j_n} x_1^{j_1} \cdots x_n^{j_n}.$$

Merk op dat geldt $D_1^{j_1} \cdots D_n^{j_n} P(\vec{\mathbf{0}}) = j_1! \cdots j_n! a_{j_1,\dots,j_n}$.

Polynomen in meer variabelen

Een tweedegraadspolynoom op de $\mathbb{R}^2$ ziet er uit als

$$P(x_1, x_2) = a_{0,0} + a_{1,0}x_1 + a_{0,1}x_2 + a_{1,1}x_1x_2 + a_{2,0}x_1^2 + a_{0,2}x_2^2$$

of compacter

$$P(x_1, x_2) = \sum_{j_1+j_2\leq 2} a_{j_1,j_2}x_1^{j_1}x_2^{j_2}.$$

Meer algemeen is een k-degraads polynoom op $\mathbb{R}^n$ van de vorm

$$P(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j_1+\cdots+j_n\leq k} a_{j_1,\ldots,j_n}x_1^{j_1}\cdots x_n^{j_n}.$$

Merk op dat geldt $D_1^{j_1}\cdots D_n^{j_n}P(\vec{\mathbf{0}}) = j_1!\cdots j_n!a_{j_1,\ldots,j_n}$. Dit suggereert dat we een C^k functie f kunnen proberen te benaderen met

$$T_k(\vec{\mathbf{x}})$$

Polynomen in meer variabelen

Een tweedegraadspolynoom op de $\mathbb{R}^2$ ziet er uit als

$$P(x_1, x_2) = a_{0,0} + a_{1,0}x_1 + a_{0,1}x_2 + a_{1,1}x_1x_2 + a_{2,0}x_1^2 + a_{0,2}x_2^2$$

of compacter

$$P(x_1, x_2) = \sum_{j_1+j_2\leq 2} a_{j_1,j_2}x_1^{j_1}x_2^{j_2}.$$

Meer algemeen is een k-degraads polynoom op $\mathbb{R}^n$ van de vorm

$$P(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j_1+\cdots+j_n\leq k} a_{j_1,\ldots,j_n}x_1^{j_1}\cdots x_n^{j_n}.$$

Merk op dat geldt $D_1^{j_1}\cdots D_n^{j_n}P(\vec{\mathbf{0}}) = j_1!\cdots j_n!a_{j_1,\ldots,j_n}$. Dit suggereert dat we een C^k functie f kunnen proberen te benaderen met

$$T_k(\vec{\mathbf{x}}) = \sum_{j_1+\cdots+j_n\leq k} \frac{D_1^{j_1}\cdots D_n^{j_n}f(\vec{\mathbf{0}})}{j_1!\cdots j_n!}x_1^{j_1}\cdots x_n^{j_n}.$$

Taylor naar meer dimensies

Zij $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ een C^p-functie.

Taylor naar meer dimensies

Zij $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ een C^p-functie. Definieer $g(t) = f(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{h}})$.

Taylor naar meer dimensies

Zij $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ een C^p-functie. Definieer $g(t) = f(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{h}})$. Dan is $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Taylor naar meer dimensies

Zij $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ een C^p-functie. Definieer $g(t) = f(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{h}})$. Dan is $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met

$$g'(t)$$

Taylor naar meer dimensies

Zij $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ een C^p-functie. Definieer $g(t) = f(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{h}})$. Dan is $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met

$$g'(t) = f'(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{h}})\vec{\mathbf{h}}$$

Taylor naar meer dimensies

Zij $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ een C^p-functie. Definieer $g(t) = f(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{h}})$. Dan is $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met

$$g'(t) = f'(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{h}})\vec{\mathbf{h}} = \sum_{j=1}^{n} (D_j f)(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{h}})h_j$$

Taylor naar meer dimensies

Zij $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ een C^p-functie. Definieer $g(t) = f(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{h}})$. Dan is $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met

$$g'(t) = f'(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{h}})\vec{\mathbf{h}} = \sum_{j=1}^{n} (D_j f)(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{h}}) h_j$$

en

$$g''(t)$$

Taylor naar meer dimensies

Zij $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ een C^p-functie. Definieer $g(t) = f(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{h}})$. Dan is $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met

$$g'(t) = f'(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{h}})\vec{\mathbf{h}} = \sum_{j=1}^{n} (D_j f)(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{h}}) h_j$$

en

$$g''(t) = \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{d}{dt} (D_j f)(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{h}}) \right] h_j$$

Taylor naar meer dimensies

Zij $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ een C^p-functie. Definieer $g(t) = f(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{h}})$. Dan is $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met

$$g'(t) = f'(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{h}})\vec{\mathbf{h}} = \sum_{j=1}^{n} (D_j f)(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{h}}) h_j$$

en

$$g''(t) = \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{d}{dt} (D_j f)(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{h}}) \right] h_j = \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{n} (D_i D_j f)(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{h}}) h_i \right] h_j$$

Taylor naar meer dimensies

Zij $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ een C^p-functie. Definieer $g(t) = f(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{h}})$. Dan is $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met

$$g'(t) = f'(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{h}})\vec{\mathbf{h}} = \sum_{j=1}^{n} (D_j f)(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{h}}) h_j$$

en

$$\begin{aligned} g''(t) &= \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{d}{dt} (D_j f)(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{h}}) \right] h_j = \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{n} (D_i D_j f)(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{h}}) h_i \right] h_j \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} (D_{ij} f)(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{h}}) h_i h_j. \end{aligned}$$

Taylor naar meer dimensies

Zij $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ een C^p-functie. Definieer $g(t) = f(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{h}})$. Dan is $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met

$$g'(t) = f'(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{h}})\vec{\mathbf{h}} = \sum_{j=1}^{n} (D_j f)(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{h}}) h_j$$

en

$$\begin{aligned} g''(t) &= \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{d}{dt} (D_j f)(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{h}}) \right] h_j = \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{n} (D_i D_j f)(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{h}}) h_i \right] h_j \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} (D_{ij} f)(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{h}}) h_i h_j. \end{aligned}$$

Zo gaan we verder:

$$g^{(k)}(t)$$

Taylor naar meer dimensies

Zij $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ een C^p-functie. Definieer $g(t) = f(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{h}})$. Dan is $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met

$$g'(t) = f'(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{h}})\vec{\mathbf{h}} = \sum_{j=1}^{n} (D_j f)(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{h}})h_j$$

en

$$\begin{aligned} g''(t) &= \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{d}{dt}(D_j f)(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{h}})\right] h_j = \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{n}(D_i D_j f)(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{h}})h_i\right] h_j \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} (D_{ij} f)(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{h}})h_i h_j. \end{aligned}$$

Zo gaan we verder:

$$g^{(k)}(t) = \sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n} (D_{j_1\cdots j_k} f)(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{h}})h_{j_1} \cdots h_{j_k}$$

Taylor naar meer dimensies

Zij $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ een C^p-functie. Definieer $g(t) = f(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{h}})$. Dan is $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met

$$g'(t) = f'(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{h}})\vec{\mathbf{h}} = \sum_{j=1}^{n} (D_j f)(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{h}}) h_j$$

en

$$\begin{aligned} g''(t) &= \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{d}{dt} (D_j f)(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{h}}) \right] h_j = \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{n} (D_i D_j f)(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{h}}) h_i \right] h_j \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} (D_{ij} f)(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{h}}) h_i h_j. \end{aligned}$$

Zo gaan we verder:

$$g^{(k)}(t) = \sum_{j_1,\dots,j_k=1}^{n} (D_{j_1\cdots j_k} f)(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{h}}) h_{j_1} \cdots h_{j_k} \qquad \text{voor } k \le p.$$

Taylor naar meer dimensies

Zij $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ een C^p-functie. Definieer $g(t) = f(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{h}})$. Dan is $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met

$$g^{(k)}(t) = \sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n} (D_{j_1\cdots j_k} f)(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{h}}) h_{j_1} \cdots h_{j_k} \qquad \text{voor } k \leq p.$$

Taylor in $\mathbb{R}$

Zij $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een C^p functie. Dan is er voor elke h een $\theta \in (0, h)$ zodat

$$f(h) = f(0) + f'(0)h + \frac{f''(0)h^2}{2} + \cdots + \frac{f^{(p-1)}(0)h^{p-1}}{(p-1)!} + \frac{f^{(p)}(\theta)}{p!}.$$

Taylor naar meer dimensies

Zij $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ een C^p-functie. Definieer $g(t) = f(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{h}})$. Dan is $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met

$$g^{(k)}(t) = \sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n} (D_{j_1\cdots j_k} f)(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{h}}) h_{j_1} \cdots h_{j_k} \qquad \text{voor } k \leq p.$$

Taylor toepassen op g geeft

$$g(1)$$

Taylor in $\mathbb{R}$

Zij $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een C^p functie. Dan is er voor elke h een $\theta \in (0, h)$ zodat

$$f(h) = f(0) + f'(0)h + \frac{f''(0)h^2}{2} + \cdots + \frac{f^{(p-1)}(0)h^{p-1}}{(p-1)!} + \frac{f^{(p)}(\theta)}{p!}.$$

Taylor naar meer dimensies

Zij $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ een C^p-functie. Definieer $g(t) = f(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{h}})$. Dan is $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met

$$g^{(k)}(t) = \sum_{j_1,\dots,j_k=1}^{n} (D_{j_1\cdots j_k} f)(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{h}}) h_{j_1} \cdots h_{j_k} \qquad \text{voor } k \le p.$$

Taylor toepassen op g geeft

$$g(1) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} + R_p(1)$$

Taylor in $\mathbb{R}$

Zij $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een C^p functie. Dan is er voor elke h een $\theta \in (0, h)$ zodat

$$f(h) = f(0) + f'(0)h + \frac{f''(0)h^2}{2} + \cdots + \frac{f^{(p-1)}(0)h^{p-1}}{(p-1)!} + \frac{f^{(p)}(\theta)}{p!}.$$

Taylor naar meer dimensies

Zij $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ een C^p-functie. Definieer $g(t) = f(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{h}})$. Dan is $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met

$$g^{(k)}(t) = \sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n} (D_{j_1\cdots j_k} f)(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{h}}) h_{j_1} \cdots h_{j_k} \qquad \text{voor } k \leq p.$$

Taylor toepassen op g geeft

$$g(1) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} + R_p(1)$$

waar er $\theta \in (0,1)$ is zodat

$$R_p(1) = \frac{g^{(p)}(\theta)}{p!}$$

Taylor in $\mathbb{R}$

Zij $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een C^p functie. Dan is er voor elke h een $\theta \in (0,h)$ zodat

$$f(h) = f(0) + f'(0)h + \frac{f''(0)h^2}{2} + \cdots + \frac{f^{(p-1)}(0)h^{p-1}}{(p-1)!} + \frac{f^{(p)}(\theta)}{p!}.$$

Taylor naar meer dimensies

Zij $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ een C^p-functie. Definieer $g(t) = f(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{h}})$. Dan is $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met

$$g^{(k)}(t) = \sum_{j_1,\dots,j_k=1}^{n} (D_{j_1\cdots j_k} f)(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{h}}) h_{j_1} \cdots h_{j_k} \qquad \text{voor } k \leq p.$$

Taylor toepassen op g geeft

$$g(1) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} + R_p(1) = \sum_{k=0}^{p-1} \left(\frac{1}{k!} \sum_{j_1,\dots,j_k=1}^{n} (D_{j_1\cdots j_k} f)(\vec{\mathbf{a}}) h_{j_1} \cdots h_{j_k} \right) + R_p(1),$$

waar er $\theta \in (0,1)$ is zodat

$$R_p(1) = \frac{g^{(p)}(\theta)}{p!}$$

Taylor in $\mathbb{R}$

Zij $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een C^p functie. Dan is er voor elke h een $\theta \in (0,h)$ zodat

$$f(h) = f(0) + f'(0)h + \frac{f''(0)h^2}{2} + \cdots + \frac{f^{(p-1)}(0)h^{p-1}}{(p-1)!} + \frac{f^{(p)}(\theta)}{p!}.$$

Taylor naar meer dimensies

Zij $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ een C^p-functie. Definieer $g(t) = f(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{h}})$. Dan is $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met

$$g^{(k)}(t) = \sum_{j_1,\dots,j_k=1}^{n} (D_{j_1\cdots j_k} f)(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{h}}) h_{j_1} \cdots h_{j_k} \qquad \text{voor } k \le p.$$

Taylor toepassen op g geeft

$$g(1) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} + R_p(1) = \sum_{k=0}^{p-1} \left(\frac{1}{k!} \sum_{j_1,\dots,j_k=1}^{n} (D_{j_1\cdots j_k} f)(\vec{\mathbf{a}}) h_{j_1} \cdots h_{j_k} \right) + R_p(1),$$

waar er $\theta \in (0,1)$ is zodat

$$R_p(1) = \frac{g^{(p)}(\theta)}{p!} = \frac{1}{p!} \sum_{j_1,\dots,j_p=1}^{n} (D_{j_1\cdots j_p} f)(\vec{\mathbf{a}} + \theta\vec{\mathbf{h}}) h_{j_1} \cdots h_{j_p}$$

Taylor in $\mathbb{R}$

Zij $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een C^p functie. Dan is er voor elke h een $\theta \in (0,h)$ zodat

$$f(h) = f(0) + f'(0)h + \frac{f''(0)h^2}{2} + \cdots + \frac{f^{(p-1)}(0)h^{p-1}}{(p-1)!} + \frac{f^{(p)}(\theta)}{p!}.$$

Taylor naar meer dimensies

Zij $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ een C^p-functie. Definieer $g(t) = f(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{h}})$. Dan is $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met

$$g^{(k)}(t) = \sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n} (D_{j_1\cdots j_k} f)(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{h}}) h_{j_1} \cdots h_{j_k} \qquad \text{voor } k \le p.$$

Taylor toepassen op g geeft

$$g(1) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} + R_p(1) = \sum_{k=0}^{p-1} \left(\frac{1}{k!} \sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n} (D_{j_1\cdots j_k} f)(\vec{\mathbf{a}}) h_{j_1} \cdots h_{j_k} \right) + R_p(1),$$

waar er $\theta \in (0,1)$ is zodat

$$R_p(1) = \frac{g^{(p)}(\theta)}{p!} = \frac{1}{p!} \sum_{j_1,\ldots,j_p=1}^{n} (D_{j_1\cdots j_p} f)(\vec{\mathbf{a}} + \theta\vec{\mathbf{h}}) h_{j_1} \cdots h_{j_p}$$

Taylor naar meer dimensies

Zij $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ een C^p-functie. Definieer $g(t) = f(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{h}})$. Dan is $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met

$$g^{(k)}(t) = \sum_{j_1,\dots,j_k=1}^{n} (D_{j_1\cdots j_k} f)(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{h}}) h_{j_1} \cdots h_{j_k} \qquad \text{voor } k \le p.$$

Taylor toepassen op g geeft

$$g(1) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} + R_p(1) = \sum_{k=0}^{p-1} \left(\frac{1}{k!} \sum_{j_1,\dots,j_k=1}^{n} (D_{j_1\cdots j_k} f)(\vec{\mathbf{a}}) h_{j_1} \cdots h_{j_k} \right) + R_p(1),$$

waar er $\theta \in (0,1)$ is zodat

$$R_p(1) = \frac{g^{(p)}(\theta)}{p!} = \frac{1}{p!} \sum_{j_1,\dots,j_p=1}^{n} (D_{j_1\cdots j_p} f)(\vec{\mathbf{a}} + \theta\vec{\mathbf{h}}) h_{j_1} \cdots h_{j_p}$$

We hebben dus bewezen dat

$$f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}})$$

Taylor naar meer dimensies

Zij $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ een C^p-functie. Definieer $g(t) = f(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{h}})$. Dan is $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met

$$g^{(k)}(t) = \sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n} (D_{j_1\cdots j_k} f)(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{h}}) h_{j_1} \cdots h_{j_k} \qquad \text{voor } k \leq p.$$

Taylor toepassen op g geeft

$$g(1) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} + R_p(1) = \sum_{k=0}^{p-1} \left(\frac{1}{k!} \sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n} (D_{j_1\cdots j_k} f)(\vec{\mathbf{a}}) h_{j_1} \cdots h_{j_k} \right) + R_p(1),$$

waar er $\theta \in (0,1)$ is zodat

$$R_p(1) = \frac{g^{(p)}(\theta)}{p!} = \frac{1}{p!} \sum_{j_1,\ldots,j_p=1}^{n} (D_{j_1\cdots j_p} f)(\vec{\mathbf{a}} + \theta\vec{\mathbf{h}}) h_{j_1} \cdots h_{j_p}$$

We hebben dus bewezen dat

$$f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) = \sum_{k=0}^{p-1} \left(\frac{1}{k!} \sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n} (D_{j_1\cdots j_k} f)(\vec{\mathbf{a}}) h_{j_1} \cdots h_{j_k} \right) + R_p(\vec{\mathbf{h}}).$$

Taylor naar meer dimensies

Zij $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ een C^p-functie. Definieer $g(t) = f(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{h}})$. Dan is $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met

$$g^{(k)}(t) = \sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n} (D_{j_1\cdots j_k} f)(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{h}}) h_{j_1} \cdots h_{j_k} \qquad \text{voor } k \leq p.$$

Taylor toepassen op g geeft

$$g(1) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} + R_p(1) = \sum_{k=0}^{p-1} \left(\frac{1}{k!} \sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n} (D_{j_1\cdots j_k} f)(\vec{\mathbf{a}}) h_{j_1} \cdots h_{j_k} \right) + R_p(1),$$

waar er $\theta \in (0,1)$ is zodat

$$R_p(1) = \frac{g^{(p)}(\theta)}{p!} = \frac{1}{p!} \sum_{j_1,\ldots,j_p=1}^{n} (D_{j_1\cdots j_p} f)(\vec{\mathbf{a}} + \theta\vec{\mathbf{h}}) h_{j_1} \cdots h_{j_p} =: R_p(\vec{\mathbf{h}})$$

We hebben dus bewezen dat

$$f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) = \sum_{k=0}^{p-1} \left(\frac{1}{k!} \sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n} (D_{j_1\cdots j_k} f)(\vec{\mathbf{a}}) h_{j_1} \cdots h_{j_k} \right) + R_p(\vec{\mathbf{h}}).$$

Taylor in meer dimensies

Stelling van Taylor op $\mathbb{R}^n$, lelijke variant (12.6)

Zij $f\colon E \to \mathbb{R}$ een C^p-functie en $a \in E$. Dan geldt

$$f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) = \sum_{k=0}^{p-1} \left(\frac{1}{k!} \sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n} (D_{j_1\cdots j_k} f)(\vec{\mathbf{a}}) h_{j_1} \cdots h_{j_k} \right) + R_p(\vec{\mathbf{h}}),$$

waar er $\theta \in (0,1)$ bestaat zodat

$$R_p(\vec{\mathbf{h}}) = \frac{1}{p!} \sum_{j_1,\ldots,j_p=1}^{n} (D_{j_1\cdots j_p} f)(\vec{\mathbf{a}} + \theta \vec{\mathbf{h}}) h_{j_1} \cdots h_{j_p}.$$

Taylor in meer dimensies

Stelling van Taylor op $\mathbb{R}^n$, lelijke variant (12.6)

Zij $f: E \to \mathbb{R}$ een C^p-functie en $a \in E$. Dan geldt

$$f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) = \sum_{k=0}^{p-1} \left(\frac{1}{k!} \sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n} (D_{j_1\cdots j_k} f)(\vec{\mathbf{a}}) h_{j_1} \cdots h_{j_k} \right) + R_p(\vec{\mathbf{h}}),$$

waar er $\theta \in (0,1)$ bestaat zodat

$$R_p(\vec{\mathbf{h}}) = \frac{1}{p!} \sum_{j_1,\ldots,j_p=1}^{n} (D_{j_1\cdots j_p} f)(\vec{\mathbf{a}} + \theta \vec{\mathbf{h}}) h_{j_1} \cdots h_{j_p}.$$

Merk op dat voor een C^p functie de afgeleides $D_{j_1\cdots j_p} f$ begrensd zijn rond $\vec{\mathbf{a}}$

Taylor in meer dimensies

Stelling van Taylor op $\mathbb{R}^n$, lelijke variant (12.6)

Zij $f\colon E \to \mathbb{R}$ een C^p-functie en $a \in E$. Dan geldt

$$f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) = \sum_{k=0}^{p-1} \left(\frac{1}{k!} \sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n} (D_{j_1\cdots j_k} f)(\vec{\mathbf{a}}) h_{j_1} \cdots h_{j_k} \right) + R_p(\vec{\mathbf{h}}),$$

waar er $\theta \in (0,1)$ bestaat zodat

$$R_p(\vec{\mathbf{h}}) = \frac{1}{p!} \sum_{j_1,\ldots,j_p=1}^{n} (D_{j_1\cdots j_p} f)(\vec{\mathbf{a}} + \theta \vec{\mathbf{h}}) h_{j_1} \cdots h_{j_p}.$$

Merk op dat voor een C^p functie de afgeleides $D_{j_1\cdots j_p} f$ begrensd zijn rond $\vec{\mathbf{a}}$, dus

$$|R_p(\vec{\mathbf{h}})|$$

Taylor in meer dimensies

Stelling van Taylor op $\mathbb{R}^n$, lelijke variant (12.6)

Zij $f\colon E \to \mathbb{R}$ een C^p-functie en $a \in E$. Dan geldt

$$f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) = \sum_{k=0}^{p-1} \left(\frac{1}{k!} \sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n} (D_{j_1\cdots j_k} f)(\vec{\mathbf{a}}) h_{j_1} \cdots h_{j_k} \right) + R_p(\vec{\mathbf{h}}),$$

waar er $\theta \in (0,1)$ bestaat zodat

$$R_p(\vec{\mathbf{h}}) = \frac{1}{p!} \sum_{j_1,\ldots,j_p=1}^{n} (D_{j_1\cdots j_p} f)(\vec{\mathbf{a}} + \theta\vec{\mathbf{h}}) h_{j_1} \cdots h_{j_p}.$$

Merk op dat voor een C^p functie de afgeleides $D_{j_1\cdots j_p} f$ begrensd zijn rond $\vec{\mathbf{a}}$, dus

$$|R_p(\vec{\mathbf{h}})| \leq C \sum_{j_1\cdots j_p=1}^{n} |h_{j_1} \cdots h_{j_p}|$$

Taylor in meer dimensies

Stelling van Taylor op $\mathbb{R}^n$, lelijke variant (12.6)

Zij $f : E \to \mathbb{R}$ een C^p-functie en $a \in E$. Dan geldt

$$f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) = \sum_{k=0}^{p-1} \left(\frac{1}{k!} \sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n} (D_{j_1\cdots j_k} f)(\vec{\mathbf{a}}) h_{j_1} \cdots h_{j_k} \right) + R_p(\vec{\mathbf{h}}),$$

waar er $\theta \in (0,1)$ bestaat zodat

$$R_p(\vec{\mathbf{h}}) = \frac{1}{p!} \sum_{j_1,\ldots,j_p=1}^{n} (D_{j_1\cdots j_p} f)(\vec{\mathbf{a}} + \theta\vec{\mathbf{h}}) h_{j_1} \cdots h_{j_p}.$$

Merk op dat voor een C^p functie de afgeleides $D_{j_1\cdots j_p} f$ begrensd zijn rond $\vec{\mathbf{a}}$, dus

$$|R_p(\vec{\mathbf{h}})| \leq C \sum_{j_1\cdots j_p=1}^{n} |h_{j_1} \cdots h_{j_p}| \leq C \sum_{j_1\cdots j_p=1}^{n} \|\vec{\mathbf{h}}\|^p$$

Taylor in meer dimensies

Stelling van Taylor op $\mathbb{R}^n$, lelijke variant (12.6)

Zij $f\colon E \to \mathbb{R}$ een C^p-functie en $a \in E$. Dan geldt

$$f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) = \sum_{k=0}^{p-1} \left(\frac{1}{k!} \sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n} (D_{j_1 \cdots j_k} f)(\vec{\mathbf{a}}) h_{j_1} \cdots h_{j_k} \right) + R_p(\vec{\mathbf{h}}),$$

waar er $\theta \in (0,1)$ bestaat zodat

$$R_p(\vec{\mathbf{h}}) = \frac{1}{p!} \sum_{j_1,\ldots,j_p=1}^{n} (D_{j_1 \cdots j_p} f)(\vec{\mathbf{a}} + \theta \vec{\mathbf{h}}) h_{j_1} \cdots h_{j_p}.$$

Merk op dat voor een C^p functie de afgeleides $D_{j_1 \cdots j_p} f$ begrensd zijn rond $\vec{\mathbf{a}}$, dus

$$|R_p(\vec{\mathbf{h}})| \le C \sum_{j_1 \cdots j_p=1}^{n} |h_{j_1} \cdots h_{j_p}| \le C \sum_{j_1 \cdots j_p=1}^{n} \|\vec{\mathbf{h}}\|^p = C n^p \|\vec{\mathbf{h}}\|^p$$

Taylor in meer dimensies

Stelling van Taylor op $\mathbb{R}^n$, lelijke variant (12.6)

Zij $f : E \to \mathbb{R}$ een C^p-functie en $a \in E$. Dan geldt

$$f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) = \sum_{k=0}^{p-1} \left(\frac{1}{k!} \sum_{j_1,\dots,j_k=1}^{n} (D_{j_1\cdots j_k} f)(\vec{\mathbf{a}}) h_{j_1} \cdots h_{j_k} \right) + R_p(\vec{\mathbf{h}}),$$

waar er $\theta \in (0,1)$ bestaat zodat

$$R_p(\vec{\mathbf{h}}) = \frac{1}{p!} \sum_{j_1,\dots,j_p=1}^{n} (D_{j_1\cdots j_p} f)(\vec{\mathbf{a}} + \theta \vec{\mathbf{h}}) h_{j_1} \cdots h_{j_p}.$$

Merk op dat voor een C^p functie de afgeleides $D_{j_1\cdots j_p} f$ begrensd zijn rond $\vec{\mathbf{a}}$, dus

$$|R_p(\vec{\mathbf{h}})| \leq C \sum_{j_1\cdots j_p=1}^{n} |h_{j_1} \cdots h_{j_p}| \leq C \sum_{j_1\cdots j_p=1}^{n} \|\vec{\mathbf{h}}\|^p = Cn^p \|\vec{\mathbf{h}}\|^p = O(\|\vec{\mathbf{h}}\|^p).$$

Herordenen van termen

Bekijk

$$\sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n} (D_{j_1\cdots j_k} f)(\vec{\mathbf{a}}) h_{j_1} \cdots h_{j_k}$$

Herordenen van termen

Bekijk

$$\sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n} (D_{j_1\cdots j_k} f)(\vec{\mathbf{a}}) h_{j_1} \cdots h_{j_k}$$

Een term van deze som ziet eruit als

$$\big(D_1^{k_1} \cdots D_n^{k_n} f\big)(\vec{\mathbf{a}}) h_1^{k_1} \cdots h_n^{k_n},$$

Herordenen van termen

Bekijk

$$\sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n} (D_{j_1\cdots j_k} f)(\vec{\mathbf{a}}) h_{j_1} \cdots h_{j_k}$$

Een term van deze som ziet eruit als

$$\left(D_1^{k_1} \cdots D_n^{k_n} f\right)(\vec{\mathbf{a}}) h_1^{k_1} \cdots h_n^{k_n},$$

waar $k_1 + \cdots + k_n = k$.

Herordenen van termen

Bekijk

$$\sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n} (D_{j_1\cdots j_k} f)(\vec{\mathbf{a}}) h_{j_1} \cdots h_{j_k}$$

Een term van deze som ziet eruit als

$$\big(D_1^{k_1} \cdots D_n^{k_n} f\big)(\vec{\mathbf{a}}) h_1^{k_1} \cdots h_n^{k_n},$$

waar $k_1 + \cdots + k_n = k$. We krijgen zo'n term meerdere keren

Herordenen van termen

Bekijk

$$\sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n} (D_{j_1\cdots j_k} f)(\vec{\mathbf{a}}) h_{j_1} \cdots h_{j_k}$$

Een term van deze som ziet eruit als

$$\big(D_1^{k_1} \cdots D_n^{k_n} f\big)(\vec{\mathbf{a}}) h_1^{k_1} \cdots h_n^{k_n},$$

waar $k_1 + \cdots + k_n = k$. We krijgen zo'n term meerdere keren, want de volgorde van de afgeleides maakt niet uit en evenmin de volgorde van de h_i.

Herordenen van termen

Bekijk

$$\sum_{j_1,\dots,j_k=1}^{n} (D_{j_1\cdots j_k} f)(\vec{\mathbf{a}}) h_{j_1} \cdots h_{j_k}$$

Een term van deze som ziet eruit als

$$\left(D_1^{k_1} \cdots D_n^{k_n} f\right)(\vec{\mathbf{a}}) h_1^{k_1} \cdots h_n^{k_n},$$

waar $k_1 + \cdots + k_n = k$. We krijgen zo'n term meerdere keren, want de volgorde van de afgeleides maakt niet uit en evenmin de volgorde van de h_i. Bovenstaande term komt $\frac{k!}{k_1!\cdots k_n!}$ voor

Herordenen van termen

Bekijk

$$\sum_{j_1,\dots,j_k=1}^{n} (D_{j_1\cdots j_k} f)(\vec{\mathbf{a}}) h_{j_1} \cdots h_{j_k}$$

Een term van deze som ziet eruit als

$$\big(D_1^{k_1} \cdots D_n^{k_n} f\big)(\vec{\mathbf{a}}) h_1^{k_1} \cdots h_n^{k_n},$$

waar $k_1 + \cdots + k_n = k$. We krijgen zo'n term meerdere keren, want de volgorde van de afgeleides maakt niet uit en evenmin de volgorde van de h_i. Bovenstaande term komt $\frac{k!}{k_1! \cdots k_n!}$ voor, dus

$$\sum_{j_1,\dots,j_k=1}^{n} (D_{j_1\cdots j_k} f)(\vec{\mathbf{a}}) h_{j_1} \cdots h_{j_k}$$

Herordenen van termen

Bekijk

$$\sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n} (D_{j_1\cdots j_k} f)(\vec{\mathbf{a}}) h_{j_1} \cdots h_{j_k}$$

Een term van deze som ziet eruit als

$$\big(D_1^{k_1} \cdots D_n^{k_n} f\big)(\vec{\mathbf{a}}) h_1^{k_1} \cdots h_n^{k_n},$$

waar $k_1 + \cdots + k_n = k$. We krijgen zo'n term meerdere keren, want de volgorde van de afgeleides maakt niet uit en evenmin de volgorde van de h_i. Bovenstaande term komt $\frac{k!}{k_1!\cdots k_n!}$ voor, dus

$$\sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n} (D_{j_1\cdots j_k} f)(\vec{\mathbf{a}}) h_{j_1} \cdots h_{j_k} = \sum_{k_1+\cdots+k_n=k} \frac{k!}{k_1! \cdots k_n!} \big(D_1^{k_1} \cdots D_n^{k_n} f\big)(\vec{\mathbf{a}}) h_1^{k_1} \cdots h_n^{k_n}.$$

Termen herordend

We herschrijven nu de Taylorbenadering:

$$f(\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{h}}) = \sum_{k=0}^{p-1}\left(\frac{1}{k!}\sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n}(D_{j_1\cdots j_k}f)(\vec{\mathbf{a}})h_{j_1}\cdots h_{j_k}\right) + R_p(\vec{\mathbf{h}})$$

Termen herordend

We herschrijven nu de Taylorbenadering:

$$f(\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{h}}) = \sum_{k=0}^{p-1}\left(\frac{1}{k!}\sum_{j_1,\dots,j_k=1}^{n}(D_{j_1\cdots j_k}f)(\vec{\mathbf{a}})h_{j_1}\cdots h_{j_k}\right) + R_p(\vec{\mathbf{h}})$$

$$= \sum_{k=0}^{p-1}\frac{1}{k!}\left(\sum_{k_1+\cdots+k_n=k}\frac{k!}{k_1!\cdots k_n!}\left(D_1^{k_1}\cdots D_n^{k_n}f\right)(\vec{\mathbf{a}})h_1^{k_1}\cdots h_n^{k_n}\right) + R_p(\vec{\mathbf{h}})$$

Termen herordend

We herschrijven nu de Taylorbenadering:

$$
\begin{aligned}
f(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{h}}) &= \sum_{k=0}^{p-1} \left(\frac{1}{k!} \sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n} (D_{j_1\cdots j_k} f)(\vec{\mathbf{a}}) h_{j_1} \cdots h_{j_k} \right) + R_p(\vec{\mathbf{h}}) \\
&= \sum_{k=0}^{p-1} \left(\sum_{k_1+\cdots+k_n=k} \frac{1}{k_1! \cdots k_n!} \big(D_1^{k_1} \cdots D_n^{k_n} f\big)(\vec{\mathbf{a}}) h_1^{k_1} \cdots h_n^{k_n} \right) + R_p(\vec{\mathbf{h}})
\end{aligned}
$$

Termen herordend

We herschrijven nu de Taylorbenadering:

$$
\begin{aligned}
f(\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{h}}) &= \sum_{k=0}^{p-1}\left(\frac{1}{k!}\sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n}(D_{j_1\cdots j_k}f)(\vec{\mathbf{a}})h_{j_1}\cdots h_{j_k}\right)+R_p(\vec{\mathbf{h}})\\
&= \sum_{k=0}^{p-1}\left(\sum_{k_1+\cdots+k_n=k}\frac{1}{k_1!\cdots k_n!}\big(D_1^{k_1}\cdots D_n^{k_n}f\big)(\vec{\mathbf{a}})h_1^{k_1}\cdots h_n^{k_n}\right)+R_p(\vec{\mathbf{h}})\\
&= \sum_{k_1+\cdots+k_n\le p-1}\frac{\big(D_1^{k_1}\cdots D_n^{k_n}f\big)(\vec{\mathbf{a}})}{k_1!\cdots k_n!}h_1^{k_1}\cdots h_n^{k_n}+R_p(\vec{\mathbf{h}})
\end{aligned}
$$

Termen herordend

We herschrijven nu de Taylorbenadering:

$$f(\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{h}}) = \sum_{k=0}^{p-1}\left(\frac{1}{k!}\sum_{j_1,\dots,j_k=1}^{n}(D_{j_1\cdots j_k}f)(\vec{\mathbf{a}})h_{j_1}\cdots h_{j_k}\right) + R_p(\vec{\mathbf{h}})$$

$$= \sum_{k=0}^{p-1}\left(\sum_{k_1+\cdots+k_n=k}\frac{1}{k_1!\cdots k_n!}\big(D_1^{k_1}\cdots D_n^{k_n}f\big)(\vec{\mathbf{a}})h_1^{k_1}\cdots h_n^{k_n}\right) + R_p(\vec{\mathbf{h}})$$

$$= \sum_{k_1+\cdots+k_n\leq p-1}\frac{\big(D_1^{k_1}\cdots D_n^{k_n}f\big)(\vec{\mathbf{a}})}{k_1!\cdots k_n!}h_1^{k_1}\cdots h_n^{k_n} + R_p(\vec{\mathbf{h}})$$

Stelling van Taylor, variant 2

Zij $f\colon E\to\mathbb{R}$ een C^p-functie en $a\in E$. Dan geldt

$$f(\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{h}}) = \sum_{k_1+\cdots+k_n\leq p-1}\frac{\big(D_1^{k_1}\cdots D_n^{k_n}f\big)(\vec{\mathbf{a}})}{k_1!\cdots k_n!}h_1^{k_1}\cdots h_n^{k_n} + O(\|\vec{\mathbf{h}}\|^p).$$

Voorbeeld

Stelling van Taylor, variant 1 (12.6)

Zij $f\colon E \to \mathbb{R}$ een C^p-functie en $a \in E$. Dan geldt

$$f(\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{h}}) = \sum_{k=0}^{p-1} \left(\frac{1}{k!} \sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n} (D_{j_1\cdots j_k} f)(\vec{\mathbf{a}}) h_{j_1} \cdots h_{j_k} \right) + O(\|\vec{\mathbf{h}}\|^p),$$

Stelling van Taylor, variant 2

Zij $f\colon E \to \mathbb{R}$ een C^p-functie en $a \in E$. Dan geldt

$$f(\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{h}}) = \sum_{k_1+\cdots+k_n \le p-1} \frac{\left(D_1^{k_1} \cdots D_n^{k_n} f\right)(\vec{\mathbf{a}})}{k_1! \cdots k_n!} h_1^{k_1} \cdots h_n^{k_n} + O(\|\vec{\mathbf{h}}\|^p).$$

Bekijk $f(x,y) = e^x \cos y$ op $\mathbb{R}^2$. Bepaal de tweede-orde Taylorbenadering van f, dus het polynoom $P(x,y)$ van graad 2 zodat $f(x,y) = P(x,y) + O(\|(x,y)\|^3)$.