

Analyse: van \mathbb{R} naar \mathbb{R}^n hoorcollege

Convergentie van reeksen

Gerrit Oomens

G.Oomens@uva.nl

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica
Universiteit van Amsterdam



Analyse op de lijn: limieten van rijen

Gezien: een rij (s_n) van reële getallen **convergeert** naar s als

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad |s_n - s| < \epsilon \quad \text{als} \quad n > N.$$

Analyse op de lijn: limieten van rijen

Gezien: een rij (s_n) van reële getallen **convergeert** naar s als

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad |s_n - s| < \epsilon \quad \text{als} \quad n > N.$$

In \mathbb{R} convergeert een rij desda de rij **Cauchy** is:

Analyse op de lijn: limieten van rijen

Gezien: een rij (s_n) van reële getallen **convergeert** naar s als

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad |s_n - s| < \epsilon \quad \text{als} \quad n > N.$$

In \mathbb{R} convergeert een rij desda de rij **Cauchy** is:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad |s_n - s_m| < \epsilon \quad \text{als} \quad n, m > N.$$

Analyse op de lijn: limieten van rijen

Gezien: een rij (s_n) van reële getallen **convergeert** naar s als

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad |s_n - s| < \epsilon \quad \text{als} \quad n > N.$$

In \mathbb{R} convergeert een rij desda de rij **Cauchy** is:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad |s_n - s_m| < \epsilon \quad \text{als} \quad n, m > N.$$

Een monotone rij heeft altijd een limiet

Analyse op de lijn: limieten van rijen

Gezien: een rij (s_n) van reële getallen **convergeert** naar s als

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad |s_n - s| < \epsilon \quad \text{als} \quad n > N.$$

In \mathbb{R} convergeert een rij desda de rij **Cauchy** is:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad |s_n - s_m| < \epsilon \quad \text{als} \quad n, m > N.$$

Een monotone rij heeft altijd een limiet (mogelijk $\pm\infty$).

Analyse op de lijn: limieten van rijen

Gezien: een rij (s_n) van reële getallen **convergeert** naar s als

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad |s_n - s| < \epsilon \quad \text{als} \quad n > N.$$

In \mathbb{R} convergeert een rij desda de rij **Cauchy** is:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad |s_n - s_m| < \epsilon \quad \text{als} \quad n, m > N.$$

Een monotone rij heeft altijd een limiet (mogelijk $\pm\infty$). Een willekeurige rij hoeft niet te convergeren

Analyse op de lijn: limieten van rijen

Gezien: een rij (s_n) van reële getallen **convergeert** naar s als

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad |s_n - s| < \epsilon \quad \text{als} \quad n > N.$$

In \mathbb{R} convergeert een rij desda de rij **Cauchy** is:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad |s_n - s_m| < \epsilon \quad \text{als} \quad n, m > N.$$

Een monotone rij heeft altijd een limiet (mogelijk $\pm\infty$). Een willekeurige rij hoeft niet te convergeren, maar voor elke rij bestaan

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} s_n$$

en $\liminf_{n \rightarrow \infty} s_n$

Analyse op de lijn: limieten van rijen

Gezien: een rij (s_n) van reële getallen **convergeert** naar s als

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad |s_n - s| < \epsilon \quad \text{als} \quad n > N.$$

In \mathbb{R} convergeert een rij desda de rij **Cauchy** is:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad |s_n - s_m| < \epsilon \quad \text{als} \quad n, m > N.$$

Een monotone rij heeft altijd een limiet (mogelijk $\pm\infty$). Een willekeurige rij hoeft niet te convergeren, maar voor elke rij bestaan

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} s_n := \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{n > N} s_n \quad \text{en} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} s_n$$

Analyse op de lijn: limieten van rijen

Gezien: een rij (s_n) van reële getallen **convergeert** naar s als

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad |s_n - s| < \epsilon \quad \text{als} \quad n > N.$$

In \mathbb{R} convergeert een rij desda de rij **Cauchy** is:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad |s_n - s_m| < \epsilon \quad \text{als} \quad n, m > N.$$

Een monotone rij heeft altijd een limiet (mogelijk $\pm\infty$). Een willekeurige rij hoeft niet te convergeren, maar voor elke rij bestaan

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} s_n := \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{n > N} s_n \quad \text{en} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} s_n := \lim_{N \rightarrow \infty} \inf_{n > N} s_n.$$

Analyse op de lijn: limieten van rijen

Gezien: een rij (s_n) van reële getallen **convergeert** naar s als

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad |s_n - s| < \epsilon \quad \text{als} \quad n > N.$$

In \mathbb{R} convergeert een rij desda de rij **Cauchy** is:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad |s_n - s_m| < \epsilon \quad \text{als} \quad n, m > N.$$

Een monotone rij heeft altijd een limiet (mogelijk $\pm\infty$). Een willekeurige rij hoeft niet te convergeren, maar voor elke rij bestaan

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} s_n := \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{n > N} s_n \quad \text{en} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} s_n := \lim_{N \rightarrow \infty} \inf_{n > N} s_n.$$

We schrijven ook wel

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} s_n := \limsup_{n \rightarrow \infty} s_n, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} s_n := \liminf_{n \rightarrow \infty} s_n.$$

We bekijken nu de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

We bekijken nu de **reeks**

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots .$$

We bekijken nu de **reeks**

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots .$$

Bijvoorbeeld

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

We bekijken nu de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots .$$

Bijvoorbeeld

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

We bekijken nu de **reeks**

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots .$$

Bijvoorbeeld

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1?$$

We bekijken nu de **reeks**

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots .$$

Bijvoorbeeld

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1?$$

Wat betekent dit?

We bekijken nu de **reeks**

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots .$$

Bijvoorbeeld

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1?$$

Wat betekent dit? Definiëer een rij (s_n) volgens

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n$$

We bekijken nu de **reeks**

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots .$$

Bijvoorbeeld

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1?$$

Wat betekent dit? Definiëer een rij (s_n) volgens

$$s_n = a_1 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k,$$

de rij van **partiële sommen**.

We bekijken nu de **reeks**

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots .$$

Bijvoorbeeld

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1?$$

Wat betekent dit? Definiëer een rij (s_n) volgens

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k,$$

de rij van **partiële sommen**. Als $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = S$

We bekijken nu de **reeks**

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots .$$

Bijvoorbeeld

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1?$$

Wat betekent dit? Definiëer een rij (s_n) volgens

$$s_n = a_1 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k,$$

de rij van **partiële sommen**. Als $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = S$, schrijven we

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

We bekijken nu de **reeks**

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots .$$

Bijvoorbeeld

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1?$$

Wat betekent dit? Definiëer een rij (s_n) volgens

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k,$$

de rij van **partiële sommen**. Als $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = S$, schrijven we

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S, \quad \text{oftewel} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$$

We bekijken nu de **reeks**

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots .$$

Bijvoorbeeld

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1?$$

Wat betekent dit? Definiër een rij (s_n) volgens

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k,$$

de rij van **partiële sommen**. Als $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = S$, schrijven we

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S, \quad \text{oftewel} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k.$$

Voorbeeld: meetkundige reeks

Bekijk

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

Voorbeeld: meetkundige reeks

Bekijk

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \quad \text{met} \quad s_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k}.$$

Voorbeeld: meetkundige reeks

Bekijk

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \quad \text{met} \quad s_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k}.$$

Herinner dat

$$\sum_{k=0}^n r^k$$

Voorbeeld: meetkundige reeks

Bekijk

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \quad \text{met} \quad s_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k}.$$

Herinner dat

$$\sum_{k=0}^n r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

Voorbeeld: meetkundige reeks

Bekijk

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \quad \text{met} \quad s_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k}.$$

Herinner dat

$$\sum_{k=0}^n r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

Met $r = 1/2$ vinden we

s_n

Voorbeeld: meetkundige reeks

Bekijk

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \quad \text{met} \quad s_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k}.$$

Herinner dat

$$\sum_{k=0}^n r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

Met $r = 1/2$ vinden we

$$s_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}$$

Voorbeeld: meetkundige reeks

Bekijk

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \quad \text{met} \quad s_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k}.$$

Herinner dat

$$\sum_{k=0}^n r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

Met $r = 1/2$ vinden we

$$s_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

Voorbeeld: meetkundige reeks

Bekijk

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \quad \text{met} \quad s_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k}.$$

Herinner dat

$$\sum_{k=0}^n r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

Met $r = 1/2$ vinden we

$$s_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) \quad \text{zodat} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 2.$$

Voorbeeld: meetkundige reeks

Bekijk

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \quad \text{met} \quad s_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k}.$$

Herinner dat

$$\sum_{k=0}^n r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

Met $r = 1/2$ vinden we

$$s_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) \quad \text{zodat} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 2.$$

We zien dus $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$.

Voorbeeld: meetkundige reeks

Bekijk

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \quad \text{met} \quad s_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k}.$$

Herinner dat

$$\sum_{k=0}^n r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

Met $r = 1/2$ vinden we

$$s_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) \quad \text{zodat} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 2.$$

We zien dus $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$. Meer algemeen is

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n$$

Voorbeeld: meetkundige reeks

Bekijk

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \quad \text{met} \quad s_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k}.$$

Herinner dat

$$\sum_{k=0}^n r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

Met $r = 1/2$ vinden we

$$s_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) \quad \text{zodat} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 2.$$

We zien dus $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$. Meer algemeen is

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1 - r}$$

Voorbeeld: meetkundige reeks

Bekijk

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \quad \text{met} \quad s_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k}.$$

Herinner dat

$$\sum_{k=0}^n r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

Met $r = 1/2$ vinden we

$$s_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) \quad \text{zodat} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 2.$$

We zien dus $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$. Meer algemeen is

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1 - r} \quad \text{als } |r| < 1.$$

Gegeven een reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ zijn er twee logische vragen:

Reeksen en convergentie

Gegeven een reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ zijn er twee logische vragen:

- 1 Convergeert de reeks?

Reeksen en convergentie

Gegeven een reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ zijn er twee logische vragen:

- 1 Convergeert de reeks?
- 2 Zo ja, wat is de waarde van de reeks?

Reeksen en convergentie

Gegeven een reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ zijn er twee logische vragen:

- 1 Converteert de reeks?
- 2 Zo ja, wat is de waarde van de reeks?

We zullen ons in eerste instantie bezighouden met de eerste vraag, die ook meestal makkelijker is.

Reeksen en convergentie

Gegeven een reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ zijn er twee logische vragen:

- 1 Convergeert de reeks?
- 2 Zo ja, wat is de waarde van de reeks?

We zullen ons in eerste instantie bezighouden met de eerste vraag, die ook meestal makkelijker is. Zo zullen we zien dat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Reeksen en convergentie

Gegeven een reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ zijn er twee logische vragen:

- 1 Convergeert de reeks?
- 2 Zo ja, wat is de waarde van de reeks?

We zullen ons in eerste instantie bezighouden met de eerste vraag, die ook meestal makkelijker is. Zo zullen we zien dat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

Reeksen en convergentie

Gegeven een reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ zijn er twee logische vragen:

- 1 Convergeert de reeks?
- 2 Zo ja, wat is de waarde van de reeks?

We zullen ons in eerste instantie bezighouden met de eerste vraag, die ook meestal makkelijker is. Zo zullen we zien dat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

maar is het lastiger te bewijzen dat $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Reeksen en convergentie

Gegeven een reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ zijn er twee logische vragen:

- 1 Convergeert de reeks?
- 2 Zo ja, wat is de waarde van de reeks?

We zullen ons in eerste instantie bezighouden met de eerste vraag, die ook meestal makkelijker is. Zo zullen we zien dat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

maar is het lastiger te bewijzen dat $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Merk op: voor convergentie maakt het beginstuk niet uit

Reeksen en convergentie

Gegeven een reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ zijn er twee logische vragen:

- 1 Convergeert de reeks?
- 2 Zo ja, wat is de waarde van de reeks?

We zullen ons in eerste instantie bezighouden met de eerste vraag, die ook meestal makkelijker is. Zo zullen we zien dat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

maar is het lastiger te bewijzen dat $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Merk op: voor convergentie maakt het beginstuk niet uit, en dus ook niet waar je begint: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergeert desda $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ dat doet.

Reeksen en convergentie

Gegeven een reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ zijn er twee logische vragen:

- 1 Convergeert de reeks?
- 2 Zo ja, wat is de waarde van de reeks?

We zullen ons in eerste instantie bezighouden met de eerste vraag, die ook meestal makkelijker is. Zo zullen we zien dat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

maar is het lastiger te bewijzen dat $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Merk op: voor convergentie maakt het beginstuk niet uit, en dus ook niet waar je begint: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergeert desda $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ dat doet. Men schrijft $\sum a_n$ als de precieze ondergrens niet relevant is.

Cauchy criterium

Bekijk een reeks $\sum a_n$ met partiële sommen (s_n) .

Cauchy criterium

Bekijk een reeks $\sum a_n$ met partiële sommen (s_n) . We hebben

$$\sum a_n \text{ convergeert} \iff s_n \text{ convergeert}$$

Cauchy criterium

Bekijk een reeks $\sum a_n$ met partiële sommen (s_n) . We hebben

$$\sum a_n \text{ convergeert} \iff s_n \text{ convergeert} \iff s_n \text{ is Cauchy.}$$

Cauchy criterium

Bekijk een reeks $\sum a_n$ met partiële sommen (s_n) . We hebben

$$\sum a_n \text{ convergeert} \Leftrightarrow s_n \text{ convergeert} \Leftrightarrow s_n \text{ is Cauchy.}$$

Dit laatste geeft

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad |s_n - s_m| < \epsilon \quad \text{als} \quad n, m > N,$$

Cauchy criterium

Bekijk een reeks $\sum a_n$ met partiële sommen (s_n) . We hebben

$$\sum a_n \text{ convergeert} \Leftrightarrow s_n \text{ convergeert} \Leftrightarrow s_n \text{ is Cauchy.}$$

Dit laatste geeft

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad |s_n - s_m| < \epsilon \quad \text{als} \quad n, m > N,$$

oftewel

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad \left| \sum_{k=0}^n a_k - \sum_{k=0}^m a_k \right| < \epsilon \quad \text{als} \quad n, m > N$$

Cauchy criterium

Bekijk een reeks $\sum a_n$ met partiële sommen (s_n) . We hebben

$$\sum a_n \text{ convergeert} \Leftrightarrow s_n \text{ convergeert} \Leftrightarrow s_n \text{ is Cauchy.}$$

Dit laatste geeft

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad |s_n - s_m| < \epsilon \quad \text{als} \quad n, m > N,$$

oftewel

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad \left| \sum_{k=0}^n a_k - \sum_{k=0}^m a_k \right| < \epsilon \quad \text{als} \quad n > m > N$$

Cauchy criterium

Bekijk een reeks $\sum a_n$ met partiële sommen (s_n) . We hebben

$$\sum a_n \text{ convergeert} \Leftrightarrow s_n \text{ convergeert} \Leftrightarrow s_n \text{ is Cauchy.}$$

Dit laatste geeft

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad |s_n - s_m| < \epsilon \quad \text{als} \quad n, m > N,$$

oftewel

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad \left| \sum_{k=0}^n a_k - \sum_{k=0}^m a_k \right| < \epsilon \quad \text{als} \quad n > m > N$$

en dus

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad \left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| < \epsilon \quad \text{als} \quad n > m > N.$$

Cauchy criterium

Bekijk een reeks $\sum a_n$ met partiële sommen (s_n) . We hebben

$$\sum a_n \text{ convergeert} \Leftrightarrow s_n \text{ convergeert} \Leftrightarrow s_n \text{ is Cauchy.}$$

Dit laatste geeft

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad |s_n - s_m| < \epsilon \quad \text{als} \quad n, m > N,$$

oftewel

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad \left| \sum_{k=0}^n a_k - \sum_{k=0}^m a_k \right| < \epsilon \quad \text{als} \quad n > m > N$$

en dus

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad \left| \sum_{k=m}^n a_k \right| < \epsilon \quad \text{als} \quad n \geq m > N.$$

Cauchy criterium

Bekijk een reeks $\sum a_n$ met partiële sommen (s_n) . We hebben

$$\sum a_n \text{ convergeert} \Leftrightarrow s_n \text{ convergeert} \Leftrightarrow s_n \text{ is Cauchy.}$$

Dit laatste geeft

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad |s_n - s_m| < \epsilon \quad \text{als} \quad n, m > N,$$

oftewel

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad \left| \sum_{k=0}^n a_k - \sum_{k=0}^m a_k \right| < \epsilon \quad \text{als} \quad n > m > N$$

en dus

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad \left| \sum_{k=m}^n a_k \right| < \epsilon \quad \text{als} \quad n \geq m > N.$$

Deze voorwaarde voor convergentie heet het **Cauchy criterium**.

Convergentie volgens Cauchy

Cauchy criterium (Stelling 14.4)

Een reeks $\sum a_n$ convergeert desda hij voldoet aan het Cauchy criterium:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad \left| \sum_{k=m}^n a_k \right| < \epsilon \quad \text{als} \quad n \geq m > N.$$

Convergentie volgens Cauchy

Cauchy criterium (Stelling 14.4)

Een reeks $\sum a_n$ convergeert desda hij voldoet aan het Cauchy criterium:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad \left| \sum_{k=m}^n a_k \right| < \epsilon \quad \text{als} \quad n \geq m > N.$$

Als we hier $m = n$ nemen zien we dat

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad |a_n| < \epsilon \quad \text{als} \quad n > N,$$

Convergentie volgens Cauchy

Cauchy criterium (Stelling 14.4)

Een reeks $\sum a_n$ convergeert desda hij voldoet aan het Cauchy criterium:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad \left| \sum_{k=m}^n a_k \right| < \epsilon \quad \text{als} \quad n \geq m > N.$$

Als we hier $m = n$ nemen zien we dat

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad |a_n| < \epsilon \quad \text{als} \quad n > N,$$

dus $a_n \rightarrow 0$.

Convergentie volgens Cauchy

Cauchy criterium (Stelling 14.4)

Een reeks $\sum a_n$ convergeert desda hij voldoet aan het Cauchy criterium:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad \left| \sum_{k=m}^n a_k \right| < \epsilon \quad \text{als} \quad n \geq m > N.$$

Als we hier $m = n$ nemen zien we dat

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad |a_n| < \epsilon \quad \text{als} \quad n > N,$$

dus $a_n \rightarrow 0$. Oftewel:

als een reeks convergeert, **dan** geldt $a_n \rightarrow 0$.

Convergentie volgens Cauchy

Cauchy criterium (Stelling 14.4)

Een reeks $\sum a_n$ convergeert desda hij voldoet aan het Cauchy criterium:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad \left| \sum_{k=m}^n a_k \right| < \epsilon \quad \text{als} \quad n \geq m > N.$$

Als we hier $m = n$ nemen zien we dat

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad |a_n| < \epsilon \quad \text{als} \quad n > N,$$

dus $a_n \rightarrow 0$. Oftewel:

als een reeks convergeert, **dan** geldt $a_n \rightarrow 0$.

Dit geldt **niet** andersom

Convergentie volgens Cauchy

Cauchy criterium (Stelling 14.4)

Een reeks $\sum a_n$ convergeert desda hij voldoet aan het Cauchy criterium:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad \left| \sum_{k=m}^n a_k \right| < \epsilon \quad \text{als} \quad n \geq m > N.$$

Als we hier $m = n$ nemen zien we dat

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad |a_n| < \epsilon \quad \text{als} \quad n > N,$$

dus $a_n \rightarrow 0$. Oftewel:

als een reeks convergeert, **dan** geldt $a_n \rightarrow 0$.

Dit geldt **niet** andersom: we zullen zien dat $\sum \frac{1}{n}$ niet convergeert.

Vergelijken

De makkelijkste manier om te zien of een reeks convergeert is om deze te vergelijken met een waarvan het gedrag bekend is:

De makkelijkste manier om te zien of een reeks convergeert is om deze te vergelijken met een waarvan het gedrag bekend is:

Vergelijkingscriterium (14.6)

Zij $\sum a_n, \sum b_n$ reeksen, waarbij $a_n \geq 0$ voor alle n .

- 1 Als $\sum a_n$ convergeert en $|b_n| \leq a_n$ voor alle (voldoende grote) n , dan convergeert $\sum b_n$ ook.

De makkelijkste manier om te zien of een reeks convergeert is om deze te vergelijken met een waarvan het gedrag bekend is:

Vergelijkingscriterium (14.6)

Zij $\sum a_n, \sum b_n$ reeksen, waarbij $a_n \geq 0$ voor alle n .

- 1 Als $\sum a_n$ convergeert en $|b_n| \leq a_n$ voor alle (voldoende grote) n , dan convergeert $\sum b_n$ ook.

Bewijs van 1:

De makkelijkste manier om te zien of een reeks convergeert is om deze te vergelijken met een waarvan het gedrag bekend is:

Vergelijkingscriterium (14.6)

Zij $\sum a_n, \sum b_n$ reeksen, waarbij $a_n \geq 0$ voor alle n .

- 1 Als $\sum a_n$ convergeert en $|b_n| \leq a_n$ voor alle (voldoende grote) n , dan convergeert $\sum b_n$ ook.

Bewijs van 1: Aan te tonen is dat

$$\left| \sum_{k=m}^n b_k \right|$$

klein is.

De makkelijkste manier om te zien of een reeks convergeert is om deze te vergelijken met een waarvan het gedrag bekend is:

Vergelijkingscriterium (14.6)

Zij $\sum a_n, \sum b_n$ reeksen, waarbij $a_n \geq 0$ voor alle n .

- 1 Als $\sum a_n$ convergeert en $|b_n| \leq a_n$ voor alle (voldoende grote) n , dan convergeert $\sum b_n$ ook.

Bewijs van 1: Aan te tonen is dat

$$\left| \sum_{k=m}^n b_k \right| \leq \sum_{k=m}^n |b_k|$$

klein is.

De makkelijkste manier om te zien of een reeks convergeert is om deze te vergelijken met een waarvan het gedrag bekend is:

Vergelijkingscriterium (14.6)

Zij $\sum a_n, \sum b_n$ reeksen, waarbij $a_n \geq 0$ voor alle n .

- 1 Als $\sum a_n$ convergeert en $|b_n| \leq a_n$ voor alle (voldoende grote) n , dan convergeert $\sum b_n$ ook.

Bewijs van 1: Aan te tonen is dat

$$\left| \sum_{k=m}^n b_k \right| \leq \sum_{k=m}^n |b_k| \leq \sum_{k=m}^n a_k$$

klein is.

De makkelijkste manier om te zien of een reeks convergeert is om deze te vergelijken met een waarvan het gedrag bekend is:

Vergelijkingscriterium (14.6)

Zij $\sum a_n, \sum b_n$ reeksen, waarbij $a_n \geq 0$ voor alle n .

- 1 Als $\sum a_n$ convergeert en $|b_n| \leq a_n$ voor alle (voldoende grote) n , dan convergeert $\sum b_n$ ook.

Bewijs van 1: Aan te tonen is dat

$$\left| \sum_{k=m}^n b_k \right| \leq \sum_{k=m}^n |b_k| \leq \sum_{k=m}^n a_k$$

klein is. Dit volgt direct uit het feit dat $\sum a_k$ convergeert. □

Vergelijken

De makkelijkste manier om te zien of een reeks convergeert is om deze te vergelijken met een waarvan het gedrag bekend is:

Vergelijkingscriterium (14.6)

Zij $\sum a_n, \sum b_n$ reeksen, waarbij $a_n \geq 0$ voor alle n .

- 1** Als $\sum a_n$ convergeert en $|b_n| \leq a_n$ voor alle (voldoende grote) n , dan convergeert $\sum b_n$ ook.

Bewijs van 1: Aan te tonen is dat

$$\left| \sum_{k=m}^n b_k \right| \leq \sum_{k=m}^n |b_k| \leq \sum_{k=m}^n a_k$$

klein is. Dit volgt direct uit het feit dat $\sum a_k$ convergeert. □

Voorbeeld: $\sum \frac{1}{n^2+n}$

De makkelijkste manier om te zien of een reeks convergeert is om deze te vergelijken met een waarvan het gedrag bekend is:

Vergelijkingscriterium (14.6)

Zij $\sum a_n, \sum b_n$ reeksen, waarbij $a_n \geq 0$ voor alle n .

- 1** Als $\sum a_n$ convergeert en $|b_n| \leq a_n$ voor alle (voldoende grote) n , dan convergeert $\sum b_n$ ook.

Bewijs van 1: Aan te tonen is dat

$$\left| \sum_{k=m}^n b_k \right| \leq \sum_{k=m}^n |b_k| \leq \sum_{k=m}^n a_k$$

klein is. Dit volgt direct uit het feit dat $\sum a_k$ convergeert. □

Voorbeeld: $\sum \frac{1}{n^2+n}$ convergeert.

De makkelijkste manier om te zien of een reeks convergeert is om deze te vergelijken met een waarvan het gedrag bekend is:

Vergelijkingscriterium (14.6)

Zij $\sum a_n, \sum b_n$ reeksen, waarbij $a_n \geq 0$ voor alle n .

- 1** Als $\sum a_n$ convergeert en $|b_n| \leq a_n$ voor alle (voldoende grote) n , dan convergeert $\sum b_n$ ook.

Bewijs van 1: Aan te tonen is dat

$$\left| \sum_{k=m}^n b_k \right| \leq \sum_{k=m}^n |b_k| \leq \sum_{k=m}^n a_k$$

klein is. Dit volgt direct uit het feit dat $\sum a_k$ convergeert. □

Voorbeeld: $\sum \frac{1}{n^2+n}$ convergeert. Er geldt immers $\frac{1}{n^2+n}$

De makkelijkste manier om te zien of een reeks convergeert is om deze te vergelijken met een waarvan het gedrag bekend is:

Vergelijkingscriterium (14.6)

Zij $\sum a_n, \sum b_n$ reeksen, waarbij $a_n \geq 0$ voor alle n .

- 1** Als $\sum a_n$ convergeert en $|b_n| \leq a_n$ voor alle (voldoende grote) n , dan convergeert $\sum b_n$ ook.

Bewijs van 1: Aan te tonen is dat

$$\left| \sum_{k=m}^n b_k \right| \leq \sum_{k=m}^n |b_k| \leq \sum_{k=m}^n a_k$$

klein is. Dit volgt direct uit het feit dat $\sum a_k$ convergeert. □

Voorbeeld: $\sum \frac{1}{n^2+n}$ convergeert. Er geldt immers $\frac{1}{n^2+n} \leq \frac{1}{n^2}$

De makkelijkste manier om te zien of een reeks convergeert is om deze te vergelijken met een waarvan het gedrag bekend is:

Vergelijkingscriterium (14.6)

Zij $\sum a_n, \sum b_n$ reeksen, waarbij $a_n \geq 0$ voor alle n .

- 1** Als $\sum a_n$ convergeert en $|b_n| \leq a_n$ voor alle (voldoende grote) n , dan convergeert $\sum b_n$ ook.

Bewijs van 1: Aan te tonen is dat

$$\left| \sum_{k=m}^n b_k \right| \leq \sum_{k=m}^n |b_k| \leq \sum_{k=m}^n a_k$$

klein is. Dit volgt direct uit het feit dat $\sum a_k$ convergeert. □

Voorbeeld: $\sum \frac{1}{n^2+n}$ convergeert. Er geldt immers $\frac{1}{n^2+n} \leq \frac{1}{n^2}$ en de reeks $\sum \frac{1}{n^2}$ convergeert.

Vergelijkingscriterium (14.6, comparison test)

Zij $\sum a_n, \sum b_n$ reeksen, waarbij $a_n \geq 0$ voor alle n .

- 1 Als $\sum a_n$ convergeert en $|b_n| \leq a_n$ voor alle (voldoende grote) n , dan convergeert $\sum b_n$ ook.

Vergelijkingscriterium (14.6, comparison test)

Zij $\sum a_n, \sum b_n$ reeksen, waarbij $a_n \geq 0$ voor alle n .

- 1 Als $\sum a_n$ convergeert en $|b_n| \leq a_n$ voor alle (voldoende grote) n , dan convergeert $\sum b_n$ ook.
- 2 Als $\sum a_n = \infty$ en $b_n \geq a_n$ voor alle (grote) n , dan $\sum b_n = \infty$.

Vergelijkingscriterium (14.6, comparison test)

Zij $\sum a_n, \sum b_n$ reeksen, waarbij $a_n \geq 0$ voor alle n .

- 1 Als $\sum a_n$ convergeert en $|b_n| \leq a_n$ voor alle (voldoende grote) n , dan convergeert $\sum b_n$ ook.
- 2 Als $\sum a_n = \infty$ en $b_n \geq a_n$ voor alle (grote) n , dan $\sum b_n = \infty$.

Bewijs van 2:

Vergelijkingscriterium (14.6, comparison test)

Zij $\sum a_n, \sum b_n$ reeksen, waarbij $a_n \geq 0$ voor alle n .

- 1 Als $\sum a_n$ convergeert en $|b_n| \leq a_n$ voor alle (voldoende grote) n , dan convergeert $\sum b_n$ ook.
- 2 Als $\sum a_n = \infty$ en $b_n \geq a_n$ voor alle (grote) n , dan $\sum b_n = \infty$.

Bewijs van 2: we schrijven

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k, \quad t_n = \sum_{k=1}^n b_k.$$

Vergelijkingscriterium (14.6, comparison test)

Zij $\sum a_n, \sum b_n$ reeksen, waarbij $a_n \geq 0$ voor alle n .

- 1 Als $\sum a_n$ convergeert en $|b_n| \leq a_n$ voor alle (voldoende grote) n , dan convergeert $\sum b_n$ ook.
- 2 Als $\sum a_n = \infty$ en $b_n \geq a_n$ voor alle (grote) n , dan $\sum b_n = \infty$.

Bewijs van 2: we schrijven

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k, \quad t_n = \sum_{k=1}^n b_k.$$

Dan geldt per aanname $t_n \geq s_n$

Vergelijkingscriterium (14.6, comparison test)

Zij $\sum a_n, \sum b_n$ reeksen, waarbij $a_n \geq 0$ voor alle n .

- 1 Als $\sum a_n$ convergeert en $|b_n| \leq a_n$ voor alle (voldoende grote) n , dan convergeert $\sum b_n$ ook.
- 2 Als $\sum a_n = \infty$ en $b_n \geq a_n$ voor alle (grote) n , dan $\sum b_n = \infty$.

Bewijs van 2: we schrijven

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k, \quad t_n = \sum_{k=1}^n b_k.$$

Dan geldt per aanname $t_n \geq s_n$, dus

$$\sum b_n$$

Vergelijkingscriterium (14.6, comparison test)

Zij $\sum a_n, \sum b_n$ reeksen, waarbij $a_n \geq 0$ voor alle n .

- 1 Als $\sum a_n$ convergeert en $|b_n| \leq a_n$ voor alle (voldoende grote) n , dan convergeert $\sum b_n$ ook.
- 2 Als $\sum a_n = \infty$ en $b_n \geq a_n$ voor alle (grote) n , dan $\sum b_n = \infty$.

Bewijs van 2: we schrijven

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k, \quad t_n = \sum_{k=1}^n b_k.$$

Dan geldt per aanname $t_n \geq s_n$, dus

$$\sum b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n$$

Vergelijkingscriterium (14.6, comparison test)

Zij $\sum a_n, \sum b_n$ reeksen, waarbij $a_n \geq 0$ voor alle n .

- 1 Als $\sum a_n$ convergeert en $|b_n| \leq a_n$ voor alle (voldoende grote) n , dan convergeert $\sum b_n$ ook.
- 2 Als $\sum a_n = \infty$ en $b_n \geq a_n$ voor alle (grote) n , dan $\sum b_n = \infty$.

Bewijs van 2: we schrijven

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k, \quad t_n = \sum_{k=1}^n b_k.$$

Dan geldt per aanname $t_n \geq s_n$, dus

$$\sum b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$$

Vergelijkingscriterium (14.6, comparison test)

Zij $\sum a_n, \sum b_n$ reeksen, waarbij $a_n \geq 0$ voor alle n .

- 1 Als $\sum a_n$ convergeert en $|b_n| \leq a_n$ voor alle (voldoende grote) n , dan convergeert $\sum b_n$ ook.
- 2 Als $\sum a_n = \infty$ en $b_n \geq a_n$ voor alle (grote) n , dan $\sum b_n = \infty$.

Bewijs van 2: we schrijven

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k, \quad t_n = \sum_{k=1}^n b_k.$$

Dan geldt per aanname $t_n \geq s_n$, dus

$$\sum b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum a_n = \infty. \quad \square$$

Vergelijkingscriterium (14.6, comparison test)

Zij $\sum a_n, \sum b_n$ reeksen, waarbij $a_n \geq 0$ voor alle n .

- 1 Als $\sum a_n$ convergeert en $|b_n| \leq a_n$ voor alle (voldoende grote) n , dan convergeert $\sum b_n$ ook.
- 2 Als $\sum a_n = \infty$ en $b_n \geq a_n$ voor alle (grote) n , dan $\sum b_n = \infty$.

Bewijs van 2: we schrijven

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k, \quad t_n = \sum_{k=1}^n b_k.$$

Dan geldt per aanname $t_n \geq s_n$, dus

$$\sum b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum a_n = \infty. \quad \square$$

Voorbeeld: $\sum \frac{1}{n-1}$

Vergelijkingscriterium (14.6, comparison test)

Zij $\sum a_n, \sum b_n$ reeksen, waarbij $a_n \geq 0$ voor alle n .

- 1 Als $\sum a_n$ convergeert en $|b_n| \leq a_n$ voor alle (voldoende grote) n , dan convergeert $\sum b_n$ ook.
- 2 Als $\sum a_n = \infty$ en $b_n \geq a_n$ voor alle (grote) n , dan $\sum b_n = \infty$.

Bewijs van 2: we schrijven

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k, \quad t_n = \sum_{k=1}^n b_k.$$

Dan geldt per aanname $t_n \geq s_n$, dus

$$\sum b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum a_n = \infty. \quad \square$$

Voorbeeld: $\sum \frac{1}{n-1} = \infty$

Vergelijkingscriterium (14.6, comparison test)

Zij $\sum a_n, \sum b_n$ reeksen, waarbij $a_n \geq 0$ voor alle n .

- 1 Als $\sum a_n$ convergeert en $|b_n| \leq a_n$ voor alle (voldoende grote) n , dan convergeert $\sum b_n$ ook.
- 2 Als $\sum a_n = \infty$ en $b_n \geq a_n$ voor alle (grote) n , dan $\sum b_n = \infty$.

Bewijs van 2: we schrijven

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k, \quad t_n = \sum_{k=1}^n b_k.$$

Dan geldt per aanname $t_n \geq s_n$, dus

$$\sum b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum a_n = \infty. \quad \square$$

Voorbeeld: $\sum \frac{1}{n-1} = \infty$ want $\frac{1}{n-1}$

Vergelijkingscriterium (14.6, comparison test)

Zij $\sum a_n, \sum b_n$ reeksen, waarbij $a_n \geq 0$ voor alle n .

- 1 Als $\sum a_n$ convergeert en $|b_n| \leq a_n$ voor alle (voldoende grote) n , dan convergeert $\sum b_n$ ook.
- 2 Als $\sum a_n = \infty$ en $b_n \geq a_n$ voor alle (grote) n , dan $\sum b_n = \infty$.

Bewijs van 2: we schrijven

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k, \quad t_n = \sum_{k=1}^n b_k.$$

Dan geldt per aanname $t_n \geq s_n$, dus

$$\sum b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum a_n = \infty. \quad \square$$

Voorbeeld: $\sum \frac{1}{n-1} = \infty$ want $\frac{1}{n-1} \geq \frac{1}{2n}$

Vergelijkingscriterium (14.6, comparison test)

Zij $\sum a_n, \sum b_n$ reeksen, waarbij $a_n \geq 0$ voor alle n .

- 1 Als $\sum a_n$ convergeert en $|b_n| \leq a_n$ voor alle (voldoende grote) n , dan convergeert $\sum b_n$ ook.
- 2 Als $\sum a_n = \infty$ en $b_n \geq a_n$ voor alle (grote) n , dan $\sum b_n = \infty$.

Bewijs van 2: we schrijven

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k, \quad t_n = \sum_{k=1}^n b_k.$$

Dan geldt per aanname $t_n \geq s_n$, dus

$$\sum b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum a_n = \infty. \quad \square$$

Voorbeeld: $\sum \frac{1}{n-1} = \infty$ want $\frac{1}{n-1} \geq \frac{1}{2n}$ en $\sum \frac{1}{2n}$

Vergelijkingscriterium (14.6, comparison test)

Zij $\sum a_n, \sum b_n$ reeksen, waarbij $a_n \geq 0$ voor alle n .

- 1 Als $\sum a_n$ convergeert en $|b_n| \leq a_n$ voor alle (voldoende grote) n , dan convergeert $\sum b_n$ ook.
- 2 Als $\sum a_n = \infty$ en $b_n \geq a_n$ voor alle (grote) n , dan $\sum b_n = \infty$.

Bewijs van 2: we schrijven

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k, \quad t_n = \sum_{k=1}^n b_k.$$

Dan geldt per aanname $t_n \geq s_n$, dus

$$\sum b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum a_n = \infty. \quad \square$$

Voorbeeld: $\sum \frac{1}{n-1} = \infty$ want $\frac{1}{n-1} \geq \frac{1}{2n}$ en $\sum \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \sum \frac{1}{n}$

Vergelijkingscriterium (14.6, comparison test)

Zij $\sum a_n, \sum b_n$ reeksen, waarbij $a_n \geq 0$ voor alle n .

- 1 Als $\sum a_n$ convergeert en $|b_n| \leq a_n$ voor alle (voldoende grote) n , dan convergeert $\sum b_n$ ook.
- 2 Als $\sum a_n = \infty$ en $b_n \geq a_n$ voor alle (grote) n , dan $\sum b_n = \infty$.

Bewijs van 2: we schrijven

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k, \quad t_n = \sum_{k=1}^n b_k.$$

Dan geldt per aanname $t_n \geq s_n$, dus

$$\sum b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum a_n = \infty. \quad \square$$

Voorbeeld: $\sum \frac{1}{n-1} = \infty$ want $\frac{1}{n-1} \geq \frac{1}{2n}$ en $\sum \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \sum \frac{1}{n} = \infty$.

Wortelcriterium (14.9, root test)

Zij $\sum a_n$ een reeks en definieer $\alpha = \limsup |a_n|^{1/n}$.

Wortelcriterium (14.9, root test)

Zij $\sum a_n$ een reeks en definieer $\alpha = \limsup |a_n|^{1/n}$.

- 1 Als $\alpha < 1$, dan convergeert de reeks.

Wortelcriterium (14.9, root test)

Zij $\sum a_n$ een reeks en definieer $\alpha = \limsup |a_n|^{1/n}$.

- 1 Als $\alpha < 1$, dan convergeert de reeks.
- 2 Als $\alpha > 1$, dan divergeert de reeks.

Wortelcriterium (14.9, root test)

Zij $\sum a_n$ een reeks en definieer $\alpha = \limsup |a_n|^{1/n}$.

- 1 Als $\alpha < 1$, dan convergeert de reeks.
- 2 Als $\alpha > 1$, dan divergeert de reeks.

Bewijs:

Wortelcriterium (14.9, root test)

Zij $\sum a_n$ een reeks en definieer $\alpha = \limsup |a_n|^{1/n}$.

- 1 Als $\alpha < 1$, dan convergeert de reeks.
- 2 Als $\alpha > 1$, dan divergeert de reeks.

Bewijs: merk op $\alpha = \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{n > N} |a_n|^{1/n}$.

Wortelcriterium (14.9, root test)

Zij $\sum a_n$ een reeks en definieer $\alpha = \limsup |a_n|^{1/n}$.

- 1 Als $\alpha < 1$, dan convergeert de reeks.
- 2 Als $\alpha > 1$, dan divergeert de reeks.

Bewijs: merk op $\alpha = \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{n > N} |a_n|^{1/n}$.

- 1 Als $\alpha < 1$

Wortelcriterium (14.9, root test)

Zij $\sum a_n$ een reeks en definieer $\alpha = \limsup |a_n|^{1/n}$.

- 1 Als $\alpha < 1$, dan convergeert de reeks.
- 2 Als $\alpha > 1$, dan divergeert de reeks.

Bewijs: merk op $\alpha = \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{n > N} |a_n|^{1/n}$.

- 1 Als $\alpha < 1$, dan is er $\delta > 0$

Wortelcriterium (14.9, root test)

Zij $\sum a_n$ een reeks en definieer $\alpha = \limsup |a_n|^{1/n}$.

- 1 Als $\alpha < 1$, dan convergeert de reeks.
- 2 Als $\alpha > 1$, dan divergeert de reeks.

Bewijs: merk op $\alpha = \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{n > N} |a_n|^{1/n}$.

- 1 Als $\alpha < 1$, dan is er $\delta > 0$ zodat $\sup_{n > N} |a_n|^{1/n} < 1 - \delta$

Wortelcriterium (14.9, root test)

Zij $\sum a_n$ een reeks en definieer $\alpha = \limsup |a_n|^{1/n}$.

- 1 Als $\alpha < 1$, dan convergeert de reeks.
- 2 Als $\alpha > 1$, dan divergeert de reeks.

Bewijs: merk op $\alpha = \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{n > N} |a_n|^{1/n}$.

- 1 Als $\alpha < 1$, dan is er $\delta > 0$ zodat $\sup_{n > N} |a_n|^{1/n} < 1 - \delta$ voor voldoende grote N .

Wortelcriterium (14.9, root test)

Zij $\sum a_n$ een reeks en definieer $\alpha = \limsup |a_n|^{1/n}$.

- 1 Als $\alpha < 1$, dan convergeert de reeks.
- 2 Als $\alpha > 1$, dan divergeert de reeks.

Bewijs: merk op $\alpha = \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{n > N} |a_n|^{1/n}$.

- 1 Als $\alpha < 1$, dan is er $\delta > 0$ zodat $\sup_{n > N} |a_n|^{1/n} < 1 - \delta$ voor voldoende grote N .
Dan geldt $|a_n|^{1/n} < 1 - \delta$ voor $n > N$

Wortelcriterium (14.9, root test)

Zij $\sum a_n$ een reeks en definieer $\alpha = \limsup |a_n|^{1/n}$.

- 1 Als $\alpha < 1$, dan convergeert de reeks.
- 2 Als $\alpha > 1$, dan divergeert de reeks.

Bewijs: merk op $\alpha = \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{n > N} |a_n|^{1/n}$.

- 1 Als $\alpha < 1$, dan is er $\delta > 0$ zodat $\sup_{n > N} |a_n|^{1/n} < 1 - \delta$ voor voldoende grote N .
Dan geldt $|a_n|^{1/n} < 1 - \delta$ voor $n > N$ en dus $|a_n| < (1 - \delta)^n$.

Wortelcriterium (14.9, root test)

Zij $\sum a_n$ een reeks en definieer $\alpha = \limsup |a_n|^{1/n}$.

- 1 Als $\alpha < 1$, dan convergeert de reeks.
- 2 Als $\alpha > 1$, dan divergeert de reeks.

Bewijs: merk op $\alpha = \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{n > N} |a_n|^{1/n}$.

- 1 Als $\alpha < 1$, dan is er $\delta > 0$ zodat $\sup_{n > N} |a_n|^{1/n} < 1 - \delta$ voor voldoende grote N . Dan geldt $|a_n|^{1/n} < 1 - \delta$ voor $n > N$ en dus $|a_n| < (1 - \delta)^n$. De reeks $\sum (1 - \delta)^n$ convergeert

Wortelcriterium (14.9, root test)

Zij $\sum a_n$ een reeks en definieer $\alpha = \limsup |a_n|^{1/n}$.

- 1 Als $\alpha < 1$, dan convergeert de reeks.
- 2 Als $\alpha > 1$, dan divergeert de reeks.

Bewijs: merk op $\alpha = \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{n > N} |a_n|^{1/n}$.

- 1 Als $\alpha < 1$, dan is er $\delta > 0$ zodat $\sup_{n > N} |a_n|^{1/n} < 1 - \delta$ voor voldoende grote N . Dan geldt $|a_n|^{1/n} < 1 - \delta$ voor $n > N$ en dus $|a_n| < (1 - \delta)^n$. De reeks $\sum (1 - \delta)^n$ convergeert, dus met het vergelijkingscriterium ook $\sum a_n$.

Wortelcriterium (14.9, root test)

Zij $\sum a_n$ een reeks en definieer $\alpha = \limsup |a_n|^{1/n}$.

- 1 Als $\alpha < 1$, dan convergeert de reeks.
- 2 Als $\alpha > 1$, dan divergeert de reeks.

Bewijs: merk op $\alpha = \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{n > N} |a_n|^{1/n}$.

- 1 Als $\alpha < 1$, dan is er $\delta > 0$ zodat $\sup_{n > N} |a_n|^{1/n} < 1 - \delta$ voor voldoende grote N .
Dan geldt $|a_n|^{1/n} < 1 - \delta$ voor $n > N$ en dus $|a_n| < (1 - \delta)^n$. De reeks $\sum (1 - \delta)^n$ convergeert, dus met het vergelijkingscriterium ook $\sum a_n$.
- 2 Als $\alpha > 1$

Wortelcriterium (14.9, root test)

Zij $\sum a_n$ een reeks en definieer $\alpha = \limsup |a_n|^{1/n}$.

- 1 Als $\alpha < 1$, dan convergeert de reeks.
- 2 Als $\alpha > 1$, dan divergeert de reeks.

Bewijs: merk op $\alpha = \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{n > N} |a_n|^{1/n}$.

- 1 Als $\alpha < 1$, dan is er $\delta > 0$ zodat $\sup_{n > N} |a_n|^{1/n} < 1 - \delta$ voor voldoende grote N . Dan geldt $|a_n|^{1/n} < 1 - \delta$ voor $n > N$ en dus $|a_n| < (1 - \delta)^n$. De reeks $\sum (1 - \delta)^n$ convergeert, dus met het vergelijkingscriterium ook $\sum a_n$.
- 2 Als $\alpha > 1$, dan is $|a_n|^{1/n} > 1$ voor oneindig veel n .

Wortelcriterium (14.9, root test)

Zij $\sum a_n$ een reeks en definieer $\alpha = \limsup |a_n|^{1/n}$.

- 1 Als $\alpha < 1$, dan convergeert de reeks.
- 2 Als $\alpha > 1$, dan divergeert de reeks.

Bewijs: merk op $\alpha = \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{n > N} |a_n|^{1/n}$.

- 1 Als $\alpha < 1$, dan is er $\delta > 0$ zodat $\sup_{n > N} |a_n|^{1/n} < 1 - \delta$ voor voldoende grote N . Dan geldt $|a_n|^{1/n} < 1 - \delta$ voor $n > N$ en dus $|a_n| < (1 - \delta)^n$. De reeks $\sum (1 - \delta)^n$ convergeert, dus met het vergelijkingscriterium ook $\sum a_n$.
- 2 Als $\alpha > 1$, dan is $|a_n|^{1/n} > 1$ voor oneindig veel n . Maar dan geldt ook $|a_n| > 1$

Wortelcriterium (14.9, root test)

Zij $\sum a_n$ een reeks en definieer $\alpha = \limsup |a_n|^{1/n}$.

- 1 Als $\alpha < 1$, dan convergeert de reeks.
- 2 Als $\alpha > 1$, dan divergeert de reeks.

Bewijs: merk op $\alpha = \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{n > N} |a_n|^{1/n}$.

- 1 Als $\alpha < 1$, dan is er $\delta > 0$ zodat $\sup_{n > N} |a_n|^{1/n} < 1 - \delta$ voor voldoende grote N . Dan geldt $|a_n|^{1/n} < 1 - \delta$ voor $n > N$ en dus $|a_n| < (1 - \delta)^n$. De reeks $\sum (1 - \delta)^n$ convergeert, dus met het vergelijkingscriterium ook $\sum a_n$.
- 2 Als $\alpha > 1$, dan is $|a_n|^{1/n} > 1$ voor oneindig veel n . Maar dan geldt ook $|a_n| > 1$, dus geldt niet $a_n \rightarrow 0$. □

Wortelcriterium (14.9, root test)

Zij $\sum a_n$ een reeks en definieer $\alpha = \limsup |a_n|^{1/n}$.

- 1 Als $\alpha < 1$, dan convergeert de reeks.
- 2 Als $\alpha > 1$, dan divergeert de reeks.

Bewijs: merk op $\alpha = \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{n > N} |a_n|^{1/n}$.

- 1 Als $\alpha < 1$, dan is er $\delta > 0$ zodat $\sup_{n > N} |a_n|^{1/n} < 1 - \delta$ voor voldoende grote N . Dan geldt $|a_n|^{1/n} < 1 - \delta$ voor $n > N$ en dus $|a_n| < (1 - \delta)^n$. De reeks $\sum (1 - \delta)^n$ convergeert, dus met het vergelijkingscriterium ook $\sum a_n$.
- 2 Als $\alpha > 1$, dan is $|a_n|^{1/n} > 1$ voor oneindig veel n . Maar dan geldt ook $|a_n| > 1$, dus geldt niet $a_n \rightarrow 0$. □

Merk op: de test geeft geen informatie als $\alpha = 1$

Wortelcriterium (14.9, root test)

Zij $\sum a_n$ een reeks en definieer $\alpha = \limsup |a_n|^{1/n}$.

- 1 Als $\alpha < 1$, dan convergeert de reeks.
- 2 Als $\alpha > 1$, dan divergeert de reeks.

Bewijs: merk op $\alpha = \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{n > N} |a_n|^{1/n}$.

- 1 Als $\alpha < 1$, dan is er $\delta > 0$ zodat $\sup_{n > N} |a_n|^{1/n} < 1 - \delta$ voor voldoende grote N . Dan geldt $|a_n|^{1/n} < 1 - \delta$ voor $n > N$ en dus $|a_n| < (1 - \delta)^n$. De reeks $\sum (1 - \delta)^n$ convergeert, dus met het vergelijkingscriterium ook $\sum a_n$.
- 2 Als $\alpha > 1$, dan is $|a_n|^{1/n} > 1$ voor oneindig veel n . Maar dan geldt ook $|a_n| > 1$, dus geldt niet $a_n \rightarrow 0$. □

Merk op: de test geeft geen informatie als $\alpha = 1$, bijv. bij reeksen als $\sum \frac{1}{n}$ en $\sum \frac{1}{n^2}$.

Criteria voor convergentie

Wortelcriterium (14.9, root test)

Zij $\sum a_n$ een reeks en definieer $\alpha = \limsup |a_n|^{1/n}$.

- 1 Als $\alpha < 1$, dan convergeert de reeks.
- 2 Als $\alpha > 1$, dan divergeert de reeks.

Criteria voor convergentie

Wortelcriterium (14.9, root test)

Zij $\sum a_n$ een reeks en definieer $\alpha = \limsup |a_n|^{1/n}$.

- 1 Als $\alpha < 1$, dan convergeert de reeks.
- 2 Als $\alpha > 1$, dan divergeert de reeks.

Stelling 12.2

Zij (a_n) een rij getallen ongelijk nul. Dan geldt

$$\liminf \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \liminf |a_n|^{1/n} \leq \limsup |a_n|^{1/n} \leq \limsup \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Criteria voor convergentie

Wortelcriterium (14.9, root test)

Zij $\sum a_n$ een reeks en definieer $\alpha = \limsup |a_n|^{1/n}$.

- 1 Als $\alpha < 1$, dan convergeert de reeks.
- 2 Als $\alpha > 1$, dan divergeert de reeks.

Stelling 12.2

Zij (a_n) een rij getallen ongelijk nul. Dan geldt

$$\liminf \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \liminf |a_n|^{1/n} \leq \limsup |a_n|^{1/n} \leq \limsup \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Quotiëntcriterium (14.8, ratio test)

Zij $\sum a_n$ een reeks. Er geldt:

Criteria voor convergentie

Wortelcriterium (14.9, root test)

Zij $\sum a_n$ een reeks en definieer $\alpha = \limsup |a_n|^{1/n}$.

- 1 Als $\alpha < 1$, dan convergeert de reeks.
- 2 Als $\alpha > 1$, dan divergeert de reeks.

Stelling 12.2

Zij (a_n) een rij getallen ongelijk nul. Dan geldt

$$\liminf \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \liminf |a_n|^{1/n} \leq \limsup |a_n|^{1/n} \leq \limsup \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Quotiëntcriterium (14.8, ratio test)

Zij $\sum a_n$ een reeks. Er geldt:

- 1 Als $\limsup \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$, dan convergeert $\sum a_n$.

Criteria voor convergentie

Wortelcriterium (14.9, root test)

Zij $\sum a_n$ een reeks en definieer $\alpha = \limsup |a_n|^{1/n}$.

- 1 Als $\alpha < 1$, dan convergeert de reeks.
- 2 Als $\alpha > 1$, dan divergeert de reeks.

Stelling 12.2

Zij (a_n) een rij getallen ongelijk nul. Dan geldt

$$\liminf \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \liminf |a_n|^{1/n} \leq \limsup |a_n|^{1/n} \leq \limsup \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Quotiëntcriterium (14.8, ratio test)

Zij $\sum a_n$ een reeks. Er geldt:

- 1 Als $\limsup \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$, dan convergeert $\sum a_n$.
- 2 Als $\liminf \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$, dan divergeert $\sum a_n$.