Analyse: van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}^n$ hoorcollege

Afgeleide en middelwaardestelling (20)

Gerrit Oomens
G.Oomens@uva.nl

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica
Universiteit van Amsterdam

Differentieerbaarheid

- Een functie $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ is differentieerbaar in $\vec{\mathbf{a}}$ met afgeleide $f'(\vec{\mathbf{a}})$ als
$$f(\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{h}}) - f(\vec{\mathbf{a}}) = f'(\vec{\mathbf{a}})h + o(\|\vec{\mathbf{h}}\|).$$
Hier is $f'(\vec{\mathbf{a}})$ een lineaire afbeelding van $\mathbb{R}^k$ naar $\mathbb{R}^\ell$.
- Als $k=1$ kunnen we dit herschrijven als
$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$
- De j-de partiële afgeleide van f in $\vec{\mathbf{a}}$ is de afgeleide van $g(t) = f(\vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{e}}_j)$:
$$D_j f(\vec{\mathbf{a}}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\vec{\mathbf{a}}+h\vec{\mathbf{e}}_j)-f(\vec{\mathbf{a}})}{h}.$$
- Voor een differentieerbare functie is $f'(\vec{\mathbf{a}})$ een $\ell \times k$ matrix met
$$f'(\vec{\mathbf{a}}) = \begin{bmatrix} D_1 f_1(\vec{\mathbf{a}}) & \cdots & D_k f_1(\vec{\mathbf{a}}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 f_\ell(\vec{\mathbf{a}}) & \cdots & D_k f_\ell(\vec{\mathbf{a}}) \end{bmatrix}.$$
- Als $\ell = 1$ dan noemen we de vector $f'(\vec{\mathbf{a}})$ ook wel de gradient $\nabla f(\vec{\mathbf{a}})$ van f.

Middelwaardestelling $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Stel nu dat $f\colon E \to \mathbb{R}$ waar $E \subseteq \mathbb{R}^n$ open. Neem $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}} \in E$ en bekijk
$$g(t) = f\big(\vec{\mathbf{a}} + t(\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{a}})\big).$$
Als f differentieerbaar is, dan is $g\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ dat ook met
$$g'(t) = f'\big(\vec{\mathbf{a}} + t(\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{a}})\big)(\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{a}}),$$
dus er is $\xi \in (0,1)$ zodat
$$f'(\vec{\mathbf{x}})(\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{a}}) = g'(\xi)(1-0) = g(1) - g(0) = f(\vec{\mathbf{b}}) - f(\vec{\mathbf{a}}),$$
waar $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{a}} + \xi(\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{a}})$ een punt is op het lijnstuk $[\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}]$.

Propositie 11.3 (bewezen)

Zij $f\colon E \to \mathbb{R}$ differentieerbaar, waar $E \subseteq \mathbb{R}^n$ open. Zij $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}} \in E$ zodat het lijnstuk $[\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}]$ in E ligt. Dan is er $\vec{\mathbf{x}} \in [\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}]$ zodat
$$f(\vec{\mathbf{b}}) - f(\vec{\mathbf{a}}) = f'(\vec{\mathbf{x}})(\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{a}}).$$

Middelwaardestelling $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Propositie 11.4

Zij $f\colon E \to \mathbb{R}^m$ differentieerbaar, waar $E \subseteq \mathbb{R}^n$ open. Zij $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}} \in E$ zodat het lijnstuk $[\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}]$ in E ligt. Dan is er $\vec{\mathbf{x}} \in [\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}]$ zodat
$$\|f(\vec{\mathbf{b}}) - f(\vec{\mathbf{a}})\| \le \|f'(\vec{\mathbf{x}})\| \|\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{a}}\|.$$

Bewijs: definieer
$$\phi(t) = \big(f(\vec{\mathbf{b}}) - f(\vec{\mathbf{a}})\big)^T f\big(\vec{\mathbf{a}} + t(\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{a}})\big).$$
Dan is $\phi\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ met
$$\phi'(t) = \big(f(\vec{\mathbf{b}}) - f(\vec{\mathbf{a}})\big)^T f'\big(\vec{\mathbf{a}} + t(\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{a}})\big)(\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{a}}).$$
Toepassen van de middelwaardestelling geeft:
$$\|f(\vec{\mathbf{b}}) - f(\vec{\mathbf{a}})\|^2 = \phi(1) - \phi(0) = \phi'(\xi) = \big(f(\vec{\mathbf{b}}) - f(\vec{\mathbf{a}})\big)^T f'(\vec{\mathbf{x}})(\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{a}})$$
voor $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{a}} + t(\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{a}}) \in [\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}]$. Merk nu op dat
$$\big|\big(f(\vec{\mathbf{b}}) - f(\vec{\mathbf{a}})\big)^T f'(\vec{\mathbf{x}})(\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{a}})\big| \le \|f(\vec{\mathbf{b}}) - f(\vec{\mathbf{a}})\| \|f'(\vec{\mathbf{x}})\| \|\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{a}}\|.$$

Lipschitz continuïteit

Propositie 11.4

Zij $f : E \to \mathbb{R}^m$ differentieerbaar, waar $E \subseteq \mathbb{R}^n$ open. Zij $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}} \in E$ zodat het lijnstuk $[\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}]$ in E ligt. Dan is er $\vec{\mathbf{x}} \in [\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}]$ zodat

$$\|f(\vec{\mathbf{b}}) - f(\vec{\mathbf{a}})\| \leq \|f'(\vec{\mathbf{x}})\| \|\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{a}}\|.$$

Gevolg (Stelling 11.6)

Zij $f : E \to \mathbb{R}^m$ differentieerbaar, waar $E \subseteq \mathbb{R}^n$ open en convex. Definieer $M = \sup_{\vec{\mathbf{x}} \in E} \|f'(\vec{\mathbf{x}})\|$. Dan geldt voor alle $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}} \in E$ dat

$$\|f(\vec{\mathbf{b}}) - f(\vec{\mathbf{a}})\| \leq M \|\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{a}}\|.$$

Een afbeelding $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ tussen metrische ruimtes noemen we Lipschitz-continu als er een $M > 0$ bestaat zodat voor $a, b \in X$ geldt

$$d_Y\big(f(a), f(b)\big) \leq M d_X(a, b).$$