OPGAVEN BIJ ANALYSE 2015, EXTREMA (21)

Resultaten

Definitie. Zij $E \subseteq \mathbb{R}^n$ en $f\colon E \to \mathbb{R}$. Laat $a \in \vec{E}$.

- We zeggen dat f een *lokaal maximum* in $\vec{a} \in E$ heeft als er een $\delta > 0$ is zodat $f(\vec{x}) \leq f(\vec{a})$ voor $\vec{x} \in B(\vec{a}, \delta)$.
- We noemen $\vec{a}$ een *absoluut* maximum als $f(\vec{x}) \leq f(\vec{a})$ voor alle $\vec{x} \in E$. Anders heet $\vec{a}$ *relatief.*
- We noemen $\vec{a}$ een *sterk* maximum als er een $\delta > 0$ is zodat $f(\vec{x}) < f(\vec{a})$ voor $\vec{x} \in B(\vec{a}, \delta)$ en $\vec{x} \neq \vec{a}$. Anders heet $\vec{a}$ *zwak.*
- Het punt $\vec{a}$ kan een *inwendig* maximum ($\vec{a} \in E^\circ$) of een *rand*maximum ($\vec{a} \in \partial E$) zijn.

Definitie. Zij $E \subseteq \mathbb{R}^n$ en $f\colon E \to \mathbb{R}$ differentieerbaar. Een punt $\vec{a} \in E$ met $f'(\vec{a}) = \vec{0}$ heet een *stationair punt* van f.

Stelling. *Zij $E \subseteq \mathbb{R}^2$ en $f\colon E \to \mathbb{R}$ een C^2 functie. Laat $\vec{a}$ een stationair punt en*

$$H_f(\vec{a}) = \begin{bmatrix} D_{11}f(\vec{a}) & D_{12}f(\vec{a}) \\ D_{12}f(\vec{a}) & D_{22}f(\vec{a}) \end{bmatrix}$$

de Hessiaan *van f in $\vec{a}$. Stel dat $\vec{h}^\top H_f(\vec{a})\vec{h} > 0$ voor alle $\vec{h} \neq 0$ (d.w.z. $H_f(\vec{a})$ is* positief definitief*). Dan neemt f een sterk lokaal minimum aan in $\vec{a}$.*

Lemma. *Een symmetrische matrix A is positief definitief dan en slechts dan als alle eigenwaarden van A positief zijn.*

Opgaven

Opgave 1. Bepaal van elk van de volgende functies $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de lokale extrema. Bepaal voor elk lokaal extremum of deze (i) sterk of zwak is en (ii) absoluut of relatief is.

(a) $f(x, y) = (3 - x)(3 - y)(3 - x - y)$
(b) $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$
(c) $f(x, y) = (y - 1)(x^2 - y)^2$
(d) $f(x, y) = 1 + x + y + x^2 - y^2$
(e) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$
(f) $f(x, y) = (y^2 - 1)(x^2 - y^2)$

Opgave 2. Bekijk de functie $f(x, y) = x^4 + y^4 + 2x^3$.

(a) Laat zien dat $\vec{0}$ een stationair punt is. Vind het andere stationaire punt $\vec{x}_1$.
(b) Bewijs dat $(0, 0)$ een zadelpunt is.
(c) Hoe zien de niveaukrommen $f(x, y) = c$ eruit?
(d) Bewijs dat $\vec{x}_1$ een lokaal minimum is.