OPGAVEN BIJ ANALYSE 2015, EXTREMA (22)

Resultaten

Definitie. Zij $E \subseteq \mathbb{R}^n$ en $f\colon E \to \mathbb{R}$. Laat $a \in \vec{E}$.

- We zeggen dat f een *lokaal maximum* in $\vec{a} \in E$ heeft als er een $\delta > 0$ is zodat $f(\vec{x}) \leq f(\vec{a})$ voor $\vec{x} \in B(\vec{a}, \delta)$.
- We noemen $\vec{a}$ een *absoluut* maximum als $f(\vec{x}) \leq f(\vec{a})$ voor alle $\vec{x} \in E$. Anders heet $\vec{a}$ *relatief.*
- We noemen $\vec{a}$ een *sterk* maximum als er een $\delta > 0$ is zodat $f(\vec{x}) < f(\vec{a})$ voor $\vec{x} \in B(\vec{a}, \delta)$ en $\vec{x} \neq \vec{a}$. Anders heet $\vec{a}$ *zwak.*
- Het punt $\vec{a}$ kan een *inwendig* maximum ($\vec{a} \in E^\circ$) of een *rand*maximum ($\vec{a} \in \partial E$) zijn.

Definitie. Zij $E \subseteq \mathbb{R}^n$ en $f\colon E \to \mathbb{R}$ differentieerbaar. Een punt $\vec{a} \in E$ met $f'(\vec{a}) = \vec{0}$ heet een *stationair punt* van f.

Stelling. *Zij $E \subseteq \mathbb{R}^2$ en $f\colon E \to \mathbb{R}$ een C^2 functie. Laat $\vec{a}$ een stationair punt en*

$$H_f(\vec{a}) = \begin{bmatrix} D_{11}f(\vec{a}) & D_{12}f(\vec{a}) \\ D_{12}f(\vec{a}) & D_{22}f(\vec{a}) \end{bmatrix}$$

de Hessiaan *van f in $\vec{a}$. Stel dat $\vec{h}^\top H_f(\vec{a})\vec{h} > 0$ voor alle $\vec{h} \neq 0$ (d.w.z. $H_f(\vec{a})$ is* positief definitief*). Dan neemt f een sterk lokaal minimum aan in $\vec{a}$.*

Lemma. *Een symmetrische matrix A is positief definitief dan en slechts dan als alle eigenwaarden van A positief zijn.*

Opgaven

Opgave 1. Bepaal van elk van de volgende functies $f\colon E \to \mathbb{R}$ de lokale extrema op de gegeven verzameling $E \subseteq \mathbb{R}^2$. Bepaal voor elk lokaal extremum of deze (i) sterk of zwak is en (ii) absoluut of relatief is.

(a)	$f(x,y) = 2x^4 - 3x^2y + y$	op $E = \{(x,y) : 4x^2 + y \leq 4\}$
(b)	$f(x,y) = x^2 - x + 2y^2$	op $E = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$
(c)	$f(x,y) = (x^2 - y^2)e^{-x^2-y^2}$	op $E = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$
(d)	$f(x,y) = (x^2-1)(y^2-1)(x^2+y^2-1)$	op $E = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 2\}$
(e)	$f(x,y) = x^5 - (x^2+x^3)y + y^2$	op $E = [-1,1] \times [0,1]$
(f)	$f(x,y) = x^4 + 9y^4$	op $E = \{(x,y) : x^2 + 4y^2 \leq 1\}$
(g)	$f(x,y) = 2x^2 - 3y^2 - 2x + \frac{1}{2}$	op $E = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$
(h)	$f(x,y) = x^4 - x^2y^2 - 2x^2 + 2y^2$	op $E = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$
(i)	$f(x,y) = x^2y^2 + 2xy^2 + y^4$	op $E = [-2,2] \times [-2,2]$

Opgave 2. Zij $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ een differentieerbare functie. Definieer $g(t) = f(0,t)$ en stel dat g een maximum heeft in $t_0 \in (0,1)$.

(a) Bewijs dat $D_2f(0,t_0) = 0$.

(b) Stel dat $D_1f(0,t_0) < 0$. Volgt nu dat $(0,t_0)$ een maximum is van f? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

(c) Wat weten we over de aard van $(0,t_0)$ als $D_1f(0,t_0) > 0$?

(d) Stel nu dat $t = 0$ een maximum is van g. Stel dat $D_1f(0,0) < 0$ en $D_2f(0,0) < 0$. Bewijs dat $(0,0)$ een maximum is van f.