Analyse: van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}^n$ hoorcollege

Lengtes van krommen (23)

Gerrit Oomens
G.Oomens@uva.nl

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica
Universiteit van Amsterdam

Krommes en lengte

Een kromme is een afbeelding $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$, waar $I \subseteq \mathbb{R}$ een interval is.

Definitie

Zij $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ een kromme en P een partitie $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ van $[a,b]$. We definiëren

$$\Lambda(P,\gamma) = \sum_{i=1}^n \|\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1})\|.$$

Dan is de lengte van γ gedefinieerd door

$$\Lambda(\gamma) = \sup_{P \text{ partitie van } [a,b]} \Lambda(P,\gamma).$$

Als $\Lambda(\gamma) < \infty$, noemen we γ rectificeerbaar.

Integralen op $\mathbb{R}^n$

Zij $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ continu. Definieer

$$\vec{\mathbf{J}} = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \left(\int_a^b f_i(t)\,\mathrm{d}t\right)_{i=1}^n,$$

de vector van integralen van de componenten f_i. Dan

$$\|\vec{\mathbf{J}}\|^2 = \sum_{i=1}^n J_i^2 = \sum_{i=1^n} J_i \int_a^b f_i(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \sum_{i=1}^n J_i f_i(t)\,\mathrm{d}t.$$

Volgens Cauchy-Schwarz is $\sum_{i=1}^n J_i f_i(t) \leq \|\vec{\mathbf{J}}\|\|f(t)\|$. Dan is

$$\|\vec{\mathbf{J}}\|^2 \leq \int_a^b \|\vec{\mathbf{J}}\|\|f(t)\|\,\mathrm{d}t = \|\vec{\mathbf{J}}\| \int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t.$$

Propositie 10.5 (bewezen)

Zij $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ continu. Dan geldt

$$\left\|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t.$$

Lengte en afgeleide

Stelling 10.6

Zij $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ een C^1 kromme. Dan geldt

$$\Lambda(\gamma) := \sup_{P \text{ partitie van } [a,b]} \Lambda(P,\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t < \infty.$$

- Zij P een partitie $x_0 < \cdots < x_n$ van $[a,b]$. Dan geldt
$$\Lambda(P,\gamma) = \sum_{i=1}^n \|\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1})\| = \sum_{i=1}^n \left\|\int_{x_{i-1}}^{x_i} \gamma'(t)\right\| \leq \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t.$$
- We zien $\Lambda(P,\gamma) \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t$ voor alle P, dus ook $\Lambda(\gamma) \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t < \infty$.
- Neem nu $\epsilon > 0$. Omdat γ' uniform continu is, bestaat er $\delta > 0$ zodat $\|\gamma'(s) - \gamma'(t)\| < \epsilon$ als $|s-t| < \delta$.
- Zij P een partitie $x_0 < \cdots < x_n$ van $[a,b]$ zodat $x_i - x_{i-1} < \delta$ voor alle i.
- Er geldt $\|\gamma'(t) - \gamma'(x_i)\| < \epsilon$ als $t \in (x_{i-1}, x_i)$. Dan volgt

Lengte en afgeleide

Stelling 10.6

Zij $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ een C^1 kromme. Dan geldt

$$\Lambda(\gamma) := \sup_{P \text{ partitie van } [a,b]} \Lambda(P,\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, \mathrm{d}t < \infty.$$

- Er geldt $\|\gamma'(t) - \gamma'(x_i)\| < \epsilon$ als $t \in (x_{i-1}, x_i)$. Dan volgt

$$\begin{aligned}\int_{x_{i-1}}^{x_i} \|\gamma'(t)\|\, \mathrm{d}t \le (\|\gamma'(x_i)\| + \epsilon)(x_i - x_{i-1}) &= \left\| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \gamma'(x_i)\, \mathrm{d}t \right\| + \epsilon(x_i - x_{i-1}) \\ &= \left\| \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\gamma'(t) + \gamma'(x_i) - \gamma'(t))\, \mathrm{d}t \right\| + \epsilon(x_i - x_{i-1}) \\ &\le \left\| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \gamma'(t)\, \mathrm{d}t \right\| + \left\| \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\gamma'(x_i) - \gamma'(t))\, \mathrm{d}t \right\| + \epsilon(x_i - x_{i-1}) \\ &\le \|\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1})\| + 2\epsilon(x_i - x_{i-1})\end{aligned}$$

- Dus

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\|\, \mathrm{d}t \le \sum_{i=1}^n \|\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1})\| + 2\epsilon(b-a).$$

Lengte en afgeleide

Stelling 10.6

Zij $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ een C^1 kromme. Dan geldt

$$\Lambda(\gamma) := \sup_{P \text{ partitie van } [a,b]} \Lambda(P,\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, \mathrm{d}t < \infty.$$

- Er geldt $\|\gamma'(t) - \gamma'(x_i)\| < \epsilon$ als $t \in (x_{i-1}, x_i)$. Dan volgt

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \|\gamma'(t)\|\, \mathrm{d}t \le \|\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1})\| + 2\epsilon(x_i - x_{i-1})$$

- Dus

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\|\, \mathrm{d}t \le \sum_{i=1}^n \|\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1})\| + 2\epsilon(b-a) = \Lambda(P,\gamma) + 2\epsilon(b-a).$$

- We zien dat

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\|\, \mathrm{d}t \le \Lambda(\gamma) + 2\epsilon(b-a).$$

- Aangezien ϵ willekeurig was, concluderen we dat $\Lambda(\gamma) \ge \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, \mathrm{d}t$.

Voorbeeld

Stelling 10.6

Zij $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ een C^1 kromme. Dan geldt

$$\Lambda(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, \mathrm{d}t < \infty.$$

Bekijk een cirkel om $\vec{\mathbf{0}}$ met straal r in $\mathbb{R}^2$. We kunnen deze parametriseren als

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \end{pmatrix}, \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Er geldt dan

$$\begin{aligned}\Lambda(\gamma) &= \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\|\, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \gamma_2'(t)^2}\, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2\cos^2 t + r^2 \sin^2 t}\, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} r\, \mathrm{d}t = 2\pi r.\end{aligned}$$