OPGAVEN BIJ ANALYSE 2015, LENGTE VAN KROMMEN (23)

Resultaten

Definitie. Zij $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ een kromme en P een partitie $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ van $[a,b]$. We definiëren

$$\Lambda(P,\gamma) = \sum_{i=1}^{n} \|\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1})\|.$$

Dan is de *lengte* van γ gedefinieerd door

$$\Lambda(\gamma) = \sup_{P \text{ partitie van } [a,b]} \Lambda(P,\gamma).$$

Als $\Lambda(\gamma) < \infty$, noemen we γ *rectificeerbaar.*

Stelling. *Zij $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ een C^1 kromme. Dan geldt*

$$\Lambda(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt < \infty.$$

Opgaven

Opgave 1. Bereken de lengte van het tussen $(a,0,0)$ en $(a,0,4\pi b)$ gelegen deel van de *schroeflijn* gegeven door $\gamma(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$.

Opgave 2. Bekijk de kromme in $\mathbb{R}^2$ gegeven door $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$. Bepaal de lengte van deze kromme voor t tussen 0 en $\pi/2$.

Opgave 3. Bekijk de kromme in $\mathbb{R}^2$ gegeven door $y^2 = x^3$. Bepaal de lengte van het stuk van deze kromme tussen $(1,1)$ en $(1,-1)$.

Opgave 4. We noemen twee C^1-krommen $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ en $\delta\colon [c,d] \to \mathbb{R}^n$ *equivalent* als er een bijectieve C^1-afbeelding $\phi\colon [a,b] \to [c,d]$ is met $\phi'(t) > 0$ voor alle t zodat geldt $\gamma(t) = \delta\big(\phi(t)\big)$. Zij γ en δ twee equivalentie C^1-krommen.

(a) Druk $\delta'\big(\phi(t)\big)$ uit in $\gamma'(t)$.
(b) Bewijs dat $\Lambda(\gamma) = \Lambda(\delta)$.

Opgave 5. Zij $\phi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ continu en C^1 op elk interval $[\delta,1]$ met $\delta \in (0,1)$. Definieer $\gamma_\delta\colon [\delta,1] \to \mathbb{R}^2$ door $\gamma_\delta(t) = \big(\cos(\phi(t)), \sin(\phi(t)\big)$.

(a) Bewijs dat voor $\delta \in (0,1)$ geldt

$$\Lambda(\gamma_\delta) = \int_\delta^1 |\phi'(t)|\, \mathrm{d}t.$$

(b) Bewijs dat γ_0 niet rectificeerbaar als is $\lim_{\delta \downarrow 0} \Lambda(\gamma_\delta) = \infty$.
(c) Bewijs dat γ_0 niet rectificeerbaar is als $\phi(t) = t\sin(1/t)$.