Analyse: van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}^n$ hoorcollege

Convergentie van reeksen, vervolg (2)

Gerrit Oomens
G.Oomens@uva.nl

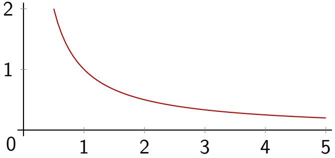
Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica
Universiteit van Amsterdam

Integralen en sommen

Stel dat we een reeks $\sum a_n$ hebben waarbij $a_n = f(n)$ voor een zekere dalende positieve functie f.

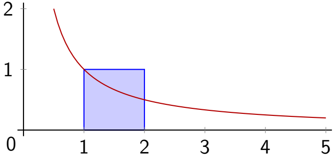
Integralen en sommen

Stel dat we een reeks $\sum a_n$ hebben waarbij $a_n = f(n)$ voor een zekere dalende positieve functie f.



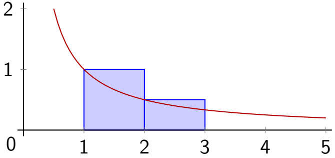
Integralen en sommen

Stel dat we een reeks $\sum a_n$ hebben waarbij $a_n = f(n)$ voor een zekere dalende positieve functie f.



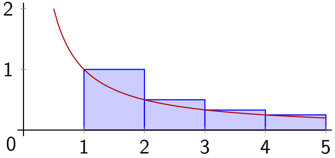
Integralen en sommen

Stel dat we een reeks $\sum a_n$ hebben waarbij $a_n = f(n)$ voor een zekere dalende positieve functie f.



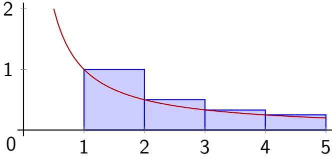
Integralen en sommen

Stel dat we een reeks $\sum a_n$ hebben waarbij $a_n = f(n)$ voor een zekere dalende positieve functie f.



Integralen en sommen

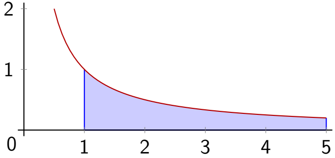
Stel dat we een reeks $\sum a_n$ hebben waarbij $a_n = f(n)$ voor een zekere dalende positieve functie f.

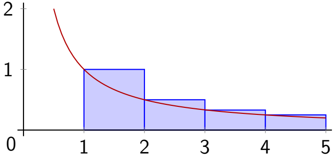


$$\sum_{k=1}^{n} a_k,$$

Integralen en sommen

Stel dat we een reeks $\sum a_n$ hebben waarbij $a_n = f(n)$ voor een zekere dalende positieve functie f.

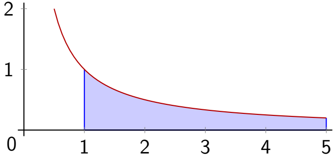


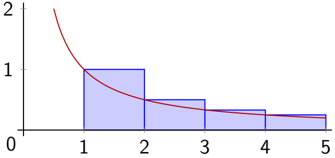


$$\sum_{k=1}^{n} a_k,$$

Integralen en sommen

Stel dat we een reeks $\sum a_n$ hebben waarbij $a_n = f(n)$ voor een zekere dalende positieve functie f.

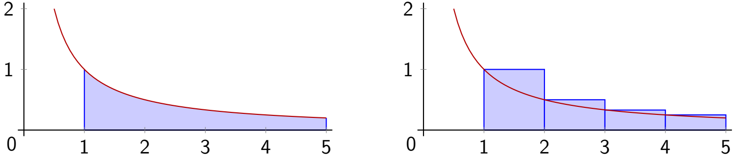




$$\int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

Integralen en sommen

Stel dat we een reeks $\sum a_n$ hebben waarbij $a_n = f(n)$ voor een zekere dalende positieve functie f.

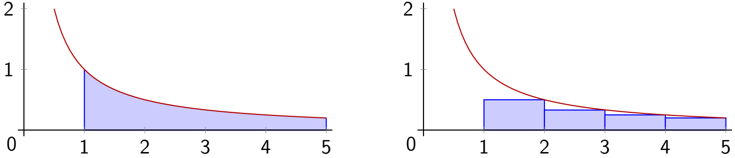


We zien dat

$$\int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

Integralen en sommen

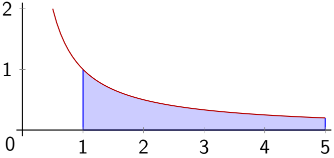
Stel dat we een reeks $\sum a_n$ hebben waarbij $a_n = f(n)$ voor een zekere dalende positieve functie f.

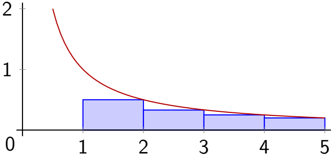


We zien dat

$$\int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

Stel dat we een reeks $\sum a_n$ hebben waarbij $a_n = f(n)$ voor een zekere dalende positieve functie f.



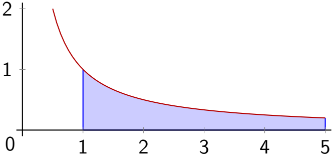


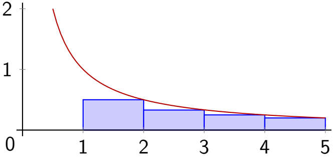
We zien dat

$$\int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n} a_k, \qquad \sum_{k=2}^{n} a_k$$

Integralen en sommen

Stel dat we een reeks $\sum a_n$ hebben waarbij $a_n = f(n)$ voor een zekere dalende positieve functie f.



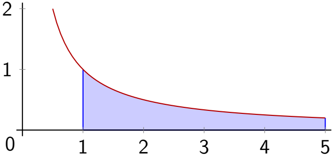


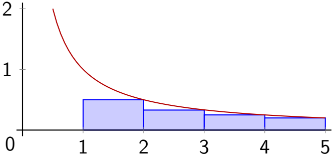
We zien dat

$$\int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t \le \sum_{k=1}^n a_k, \qquad \sum_{k=2}^n a_k \le \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Integralen en sommen

Stel dat we een reeks $\sum a_n$ hebben waarbij $a_n = f(n)$ voor een zekere dalende positieve functie f.





We zien dat

$$\int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^n a_k, \qquad \sum_{k=2}^n a_k \leq \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dus: $\sum_{n=1}^\infty a_n < \infty$ dan en slechts dan als $\int_1^\infty f(t)\,\mathrm{d}t < \infty$.

Integralen en sommen

Integraalkenmerk

Zij $\sum a_n$ een reeks zodat $a_n = f(n)$ voor een dalende positieve functie f. Dan geldt dat $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergeert dan en slechts dan als $\int_1^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t < \infty$.

Integralen en sommen

Integraalkenmerk

Zij $\sum a_n$ een reeks zodat $a_n = f(n)$ voor een dalende positieve functie f. Dan geldt dat $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergeert dan en slechts dan als $\int_1^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t < \infty$.

Hiermee kunnen we inzien dat $\sum \frac{1}{n^2}$ convergeert:

Integralen en sommen

Integraalkenmerk

Zij $\sum a_n$ een reeks zodat $a_n = f(n)$ voor een dalende positieve functie f. Dan geldt dat $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergeert dan en slechts dan als $\int_1^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t < \infty$.

Hiermee kunnen we inzien dat $\sum \frac{1}{n^2}$ convergeert:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Integralen en sommen

Integraalkenmerk

Zij $\sum a_n$ een reeks zodat $a_n = f(n)$ voor een dalende positieve functie f. Dan geldt dat $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergeert dan en slechts dan als $\int_1^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t < \infty$.

Hiermee kunnen we inzien dat $\sum \frac{1}{n^2}$ convergeert:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^{\infty}$$

Integralen en sommen

Integraalkenmerk

Zij $\sum a_n$ een reeks zodat $a_n = f(n)$ voor een dalende positieve functie f. Dan geldt dat $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergeert dan en slechts dan als $\int_1^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t < \infty$.

Hiermee kunnen we inzien dat $\sum \frac{1}{n^2}$ convergeert:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^{\infty} = 1.$$

Integralen en sommen

Integraalkenmerk

Zij $\sum a_n$ een reeks zodat $a_n = f(n)$ voor een dalende positieve functie f. Dan geldt dat $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergeert dan en slechts dan als $\int_1^{\infty} f(t)\, \mathrm{d}t < \infty$.

Hiermee kunnen we inzien dat $\sum \frac{1}{n^2}$ convergeert:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{t^2}\, \mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^{\infty} = 1.$$

Meer algemeen bekijken we $\sum \frac{1}{n^p}$ voor $p \neq 1$:

Integralen en sommen

Integraalkenmerk

Zij $\sum a_n$ een reeks zodat $a_n = f(n)$ voor een dalende positieve functie f. Dan geldt dat $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergeert dan en slechts dan als $\int_1^\infty f(t)\,\mathrm{d}t < \infty$.

Hiermee kunnen we inzien dat $\sum \frac{1}{n^2}$ convergeert:

$$\int_1^\infty \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^\infty = 1.$$

Meer algemeen bekijken we $\sum \frac{1}{n^p}$ voor $p \neq 1$:

$$\int_1^\infty t^{-p}\,\mathrm{d}t$$

Integralen en sommen

Integraalkenmerk

Zij $\sum a_n$ een reeks zodat $a_n = f(n)$ voor een dalende positieve functie f. Dan geldt dat $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergeert dan en slechts dan als $\int_1^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t < \infty$.

Hiermee kunnen we inzien dat $\sum \frac{1}{n^2}$ convergeert:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^{\infty} = 1.$$

Meer algemeen bekijken we $\sum \frac{1}{n^p}$ voor $p \neq 1$:

$$\int_1^{\infty} t^{-p}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{1-p} t^{1-p}\right]_1^{\infty}$$

Integralen en sommen

Integraalkenmerk

Zij $\sum a_n$ een reeks zodat $a_n = f(n)$ voor een dalende positieve functie f. Dan geldt dat $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergeert dan en slechts dan als $\int_1^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t < \infty$.

Hiermee kunnen we inzien dat $\sum \frac{1}{n^2}$ convergeert:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^{\infty} = 1.$$

Meer algemeen bekijken we $\sum \frac{1}{n^p}$ voor $p \neq 1$:

$$\int_1^{\infty} t^{-p}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{1-p} t^{1-p}\right]_1^{\infty} = \left\{ \right.$$

Integralen en sommen

Integraalkenmerk

Zij $\sum a_n$ een reeks zodat $a_n = f(n)$ voor een dalende positieve functie f. Dan geldt dat $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergeert dan en slechts dan als $\int_1^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t < \infty$.

Hiermee kunnen we inzien dat $\sum \frac{1}{n^2}$ convergeert:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^{\infty} = 1.$$

Meer algemeen bekijken we $\sum \frac{1}{n^p}$ voor $p \neq 1$:

$$\int_1^{\infty} t^{-p}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{1-p} t^{1-p}\right]_1^{\infty} = \begin{cases} & \text{als } p > 1 \\ & \end{cases}$$

Integralen en sommen

Integraalkenmerk

Zij $\sum a_n$ een reeks zodat $a_n = f(n)$ voor een dalende positieve functie f. Dan geldt dat $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergeert dan en slechts dan als $\int_1^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t < \infty$.

Hiermee kunnen we inzien dat $\sum \frac{1}{n^2}$ convergeert:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^{\infty} = 1.$$

Meer algemeen bekijken we $\sum \frac{1}{n^p}$ voor $p \neq 1$:

$$\int_1^{\infty} t^{-p}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{1-p}t^{1-p}\right]_1^{\infty} = \begin{cases} 1/(p-1) & \text{als } p > 1 \\ \end{cases}$$

Integralen en sommen

Integraalkenmerk

Zij $\sum a_n$ een reeks zodat $a_n = f(n)$ voor een dalende positieve functie f. Dan geldt dat $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergeert dan en slechts dan als $\int_1^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t < \infty$.

Hiermee kunnen we inzien dat $\sum \frac{1}{n^2}$ convergeert:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^{\infty} = 1.$$

Meer algemeen bekijken we $\sum \frac{1}{n^p}$ voor $p \neq 1$:

$$\int_1^{\infty} t^{-p}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{1-p} t^{1-p}\right]_1^{\infty} = \begin{cases} 1/(p-1) & \text{als } p > 1 \\ & \text{als } p < 1. \end{cases}$$

Integralen en sommen

Integraalkenmerk

Zij $\sum a_n$ een reeks zodat $a_n = f(n)$ voor een dalende positieve functie f. Dan geldt dat $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergeert dan en slechts dan als $\int_1^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t < \infty$.

Hiermee kunnen we inzien dat $\sum \frac{1}{n^2}$ convergeert:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^{\infty} = 1.$$

Meer algemeen bekijken we $\sum \frac{1}{n^p}$ voor $p \neq 1$:

$$\int_1^{\infty} t^{-p}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{1-p} t^{1-p}\right]_1^{\infty} = \begin{cases} 1/(p-1) & \text{als } p > 1 \\ \infty & \text{als } p < 1. \end{cases}$$

Integralen en sommen

Integraalkenmerk

Zij $\sum a_n$ een reeks zodat $a_n = f(n)$ voor een dalende positieve functie f. Dan geldt dat $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergeert dan en slechts dan als $\int_1^\infty f(t)\,\mathrm{d}t < \infty$.

Hiermee kunnen we inzien dat $\sum \frac{1}{n^2}$ convergeert:

$$\int_1^\infty \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^\infty = 1.$$

Meer algemeen bekijken we $\sum \frac{1}{n^p}$ voor $p \neq 1$:

$$\int_1^\infty t^{-p}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{1-p}t^{1-p}\right]_1^\infty = \begin{cases} 1/(p-1) & \text{als } p > 1 \\ \infty & \text{als } p < 1. \end{cases}$$

En voor $p = 1$ krijgen we $\int_1^\infty t^{-1}\,\mathrm{d}t$

Integralen en sommen

Integraalkenmerk

Zij $\sum a_n$ een reeks zodat $a_n = f(n)$ voor een dalende positieve functie f. Dan geldt dat $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergeert dan en slechts dan als $\int_1^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t < \infty$.

Hiermee kunnen we inzien dat $\sum \frac{1}{n^2}$ convergeert:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^{\infty} = 1.$$

Meer algemeen bekijken we $\sum \frac{1}{n^p}$ voor $p \neq 1$:

$$\int_1^{\infty} t^{-p}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{1-p} t^{1-p}\right]_1^{\infty} = \begin{cases} 1/(p-1) & \text{als } p > 1 \\ \infty & \text{als } p < 1. \end{cases}$$

En voor $p = 1$ krijgen we $\int_1^{\infty} t^{-1}\,\mathrm{d}t = [\log t]_1^{\infty}$

Integralen en sommen

Integraalkenmerk

Zij $\sum a_n$ een reeks zodat $a_n = f(n)$ voor een dalende positieve functie f. Dan geldt dat $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergeert dan en slechts dan als $\int_1^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t < \infty$.

Hiermee kunnen we inzien dat $\sum \frac{1}{n^2}$ convergeert:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^{\infty} = 1.$$

Meer algemeen bekijken we $\sum \frac{1}{n^p}$ voor $p \neq 1$:

$$\int_1^{\infty} t^{-p}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{1-p} t^{1-p}\right]_1^{\infty} = \begin{cases} 1/(p-1) & \text{als } p > 1 \\ \infty & \text{als } p < 1. \end{cases}$$

En voor $p = 1$ krijgen we $\int_1^{\infty} t^{-1}\,\mathrm{d}t = [\log t]_1^{\infty} = \infty$.

Integralen en sommen

Integraalkenmerk

Zij $\sum a_n$ een reeks zodat $a_n = f(n)$ voor een dalende positieve functie f. Dan geldt dat $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergeert dan en slechts dan als $\int_1^\infty f(t)\,\mathrm{d}t < \infty$.

Hiermee kunnen we inzien dat $\sum \frac{1}{n^2}$ convergeert:

$$\int_1^\infty \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^\infty = 1.$$

Meer algemeen bekijken we $\sum \frac{1}{n^p}$ voor $p \neq 1$:

$$\int_1^\infty t^{-p}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{1-p}t^{1-p}\right]_1^\infty = \begin{cases} 1/(p-1) & \text{als } p > 1 \\ \infty & \text{als } p < 1. \end{cases}$$

En voor $p = 1$ krijgen we $\int_1^\infty t^{-1}\,\mathrm{d}t = [\log t]_1^\infty = \infty$. Bewezen:

Stelling 15.1

De reeks $\sum \frac{1}{n^p}$ convergeert desda $p > 1$.

Alternerende reeksen

Stelling 15.3

Zij $a_1 \geq a_2 \geq \cdots$ een dalende rij van positieve getallen met $\lim a_n = 0$. Dan convergeert $\sum(-1)^{n+1} a_n$.

Alternerende reeksen

Stelling 15.3

Zij $a_1 \geq a_2 \geq \cdots$ een dalende rij van positieve getallen met $\lim a_n = 0$. Dan convergeert $\sum(-1)^{n+1}a_n$.

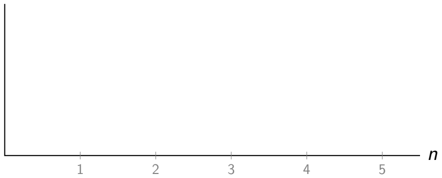
We schrijven $s_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k$ voor de partiële sommen.

Alternerende reeksen

Stelling 15.3

Zij $a_1 \geq a_2 \geq \cdots$ een dalende rij van positieve getallen met $\lim a_n = 0$. Dan convergeert $\sum(-1)^{n+1} a_n$.

We schrijven $s_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} a_k$ voor de partiële sommen.

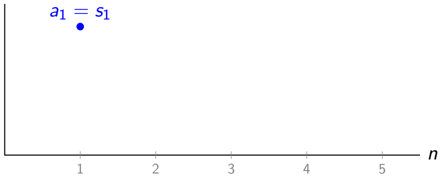


Alternerende reeksen

Stelling 15.3

Zij $a_1 \geq a_2 \geq \cdots$ een dalende rij van positieve getallen met $\lim a_n = 0$. Dan convergeert $\sum(-1)^{n+1}a_n$.

We schrijven $s_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k$ voor de partiële sommen.

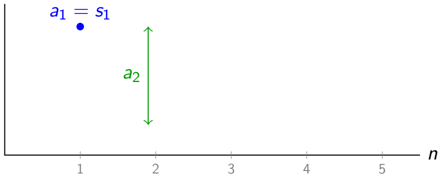


Alternerende reeksen

Stelling 15.3

Zij $a_1 \geq a_2 \geq \cdots$ een dalende rij van positieve getallen met $\lim a_n = 0$. Dan convergeert $\sum (-1)^{n+1} a_n$.

We schrijven $s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k$ voor de partiële sommen.

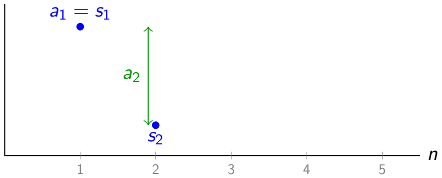


Alternerende reeksen

Stelling 15.3

Zij $a_1 \geq a_2 \geq \cdots$ een dalende rij van positieve getallen met $\lim a_n = 0$. Dan convergeert $\sum(-1)^{n+1} a_n$.

We schrijven $s_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} a_k$ voor de partiële sommen.

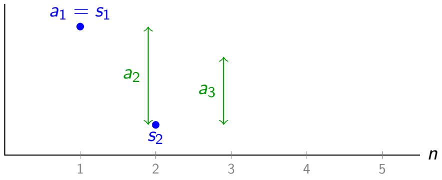


Alternerende reeksen

Stelling 15.3

Zij $a_1 \geq a_2 \geq \cdots$ een dalende rij van positieve getallen met $\lim a_n = 0$. Dan convergeert $\sum (-1)^{n+1} a_n$.

We schrijven $s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k$ voor de partiële sommen.

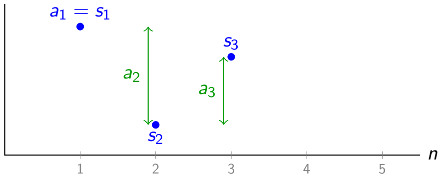


Alternerende reeksen

Stelling 15.3

Zij $a_1 \geq a_2 \geq \cdots$ een dalende rij van positieve getallen met $\lim a_n = 0$. Dan convergeert $\sum(-1)^{n+1} a_n$.

We schrijven $s_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} a_k$ voor de partiële sommen.

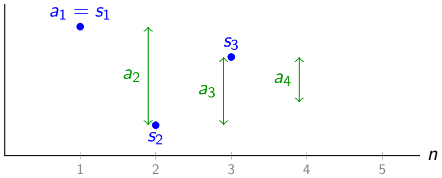


Alternerende reeksen

Stelling 15.3

Zij $a_1 \geq a_2 \geq \cdots$ een dalende rij van positieve getallen met $\lim a_n = 0$. Dan convergeert $\sum(-1)^{n+1}a_n$.

We schrijven $s_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k$ voor de partiële sommen.

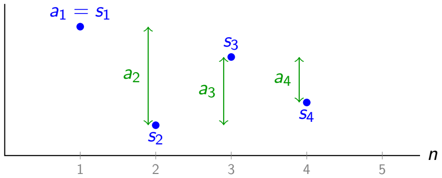


Alternerende reeksen

Stelling 15.3

Zij $a_1 \geq a_2 \geq \cdots$ een dalende rij van positieve getallen met $\lim a_n = 0$. Dan convergeert $\sum(-1)^{n+1} a_n$.

We schrijven $s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k$ voor de partiële sommen.

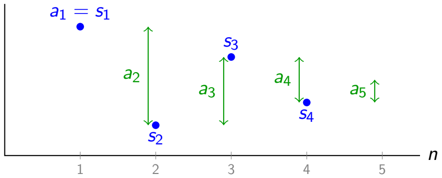


Alternerende reeksen

Stelling 15.3

Zij $a_1 \geq a_2 \geq \cdots$ een dalende rij van positieve getallen met $\lim a_n = 0$. Dan convergeert $\sum(-1)^{n+1}a_n$.

We schrijven $s_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k$ voor de partiële sommen.

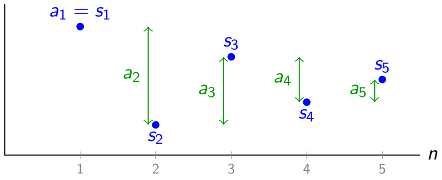


Alternerende reeksen

Stelling 15.3

Zij $a_1 \geq a_2 \geq \cdots$ een dalende rij van positieve getallen met $\lim a_n = 0$. Dan convergeert $\sum(-1)^{n+1}a_n$.

We schrijven $s_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k$ voor de partiële sommen.



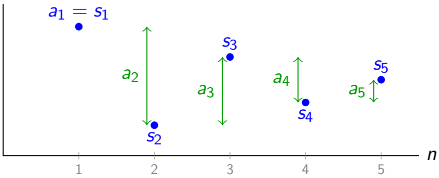
Alternerende reeksen

Stelling 15.3

Zij $a_1 \geq a_2 \geq \cdots$ een dalende rij van positieve getallen met $\lim a_n = 0$. Dan convergeert $\sum(-1)^{n+1}a_n$.

We schrijven $s_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k$ voor de partiële sommen.

- De deelrij (s_{2n}) is stijgend



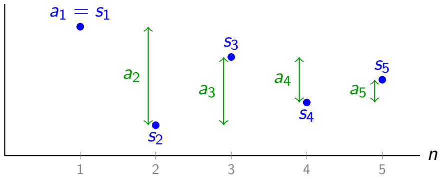
Alternerende reeksen

Stelling 15.3

Zij $a_1 \geq a_2 \geq \cdots$ een dalende rij van positieve getallen met $\lim a_n = 0$. Dan convergeert $\sum(-1)^{n+1}a_n$.

We schrijven $s_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k$ voor de partiële sommen.

- De deelrij (s_{2n}) is stijgend en (s_{2n+1}) is dalend.



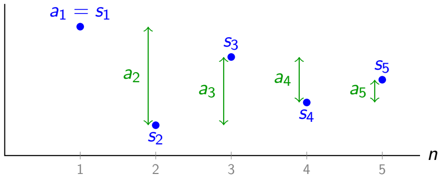
Alternerende reeksen

Stelling 15.3

Zij $a_1 \geq a_2 \geq \cdots$ een dalende rij van positieve getallen met $\lim a_n = 0$. Dan convergeert $\sum(-1)^{n+1} a_n$.

We schrijven $s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k$ voor de partiële sommen.

- De deelrij (s_{2n}) is stijgend en (s_{2n+1}) is dalend.
- Er geldt $s_{2n} \leq s_{2n-1}$



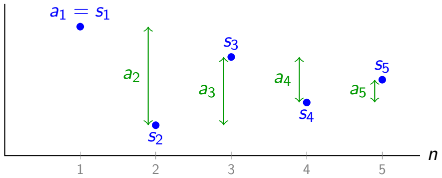
Alternerende reeksen

Stelling 15.3

Zij $a_1 \geq a_2 \geq \cdots$ een dalende rij van positieve getallen met $\lim a_n = 0$. Dan convergeert $\sum(-1)^{n+1} a_n$.

We schrijven $s_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} a_k$ voor de partiële sommen.

- De deelrij (s_{2n}) is stijgend en (s_{2n+1}) is dalend.
- Er geldt $s_{2n} \leq s_{2n-1} \leq s_1$



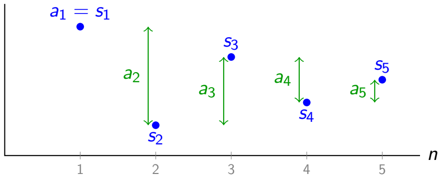
Alternerende reeksen

Stelling 15.3

Zij $a_1 \geq a_2 \geq \cdots$ een dalende rij van positieve getallen met $\lim a_n = 0$. Dan convergeert $\sum(-1)^{n+1} a_n$.

We schrijven $s_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} a_k$ voor de partiële sommen.

- De deelrij (s_{2n}) is stijgend en (s_{2n+1}) is dalend.
- Er geldt $s_{2n} \leq s_{2n-1} \leq s_1$ en $s_{2n+1} \geq s_{2n}$



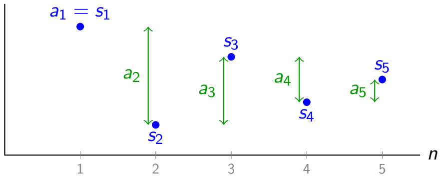
Alternerende reeksen

Stelling 15.3

Zij $a_1 \geq a_2 \geq \cdots$ een dalende rij van positieve getallen met $\lim a_n = 0$. Dan convergeert $\sum (-1)^{n+1} a_n$.

We schrijven $s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k$ voor de partiële sommen.

- De deelrij (s_{2n}) is stijgend en (s_{2n+1}) is dalend.
- Er geldt $s_{2n} \leq s_{2n-1} \leq s_1$ en $s_{2n+1} \geq s_{2n} \geq s_2$



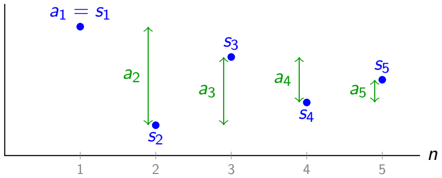
Alternerende reeksen

Stelling 15.3

Zij $a_1 \geq a_2 \geq \cdots$ een dalende rij van positieve getallen met $\lim a_n = 0$. Dan convergeert $\sum(-1)^{n+1} a_n$.

We schrijven $s_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} a_k$ voor de partiële sommen.

- De deelrij (s_{2n}) is stijgend en (s_{2n+1}) is dalend.
- Er geldt $s_{2n} \leq s_{2n-1} \leq s_1$ en $s_{2n+1} \geq s_{2n} \geq s_2$ voor alle n.



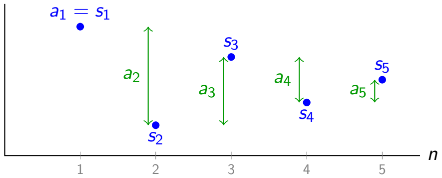
Alternerende reeksen

Stelling 15.3

Zij $a_1 \geq a_2 \geq \cdots$ een dalende rij van positieve getallen met $\lim a_n = 0$. Dan convergeert $\sum (-1)^{n+1} a_n$.

We schrijven $s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k$ voor de partiële sommen.

- De deelrij (s_{2n}) is stijgend en (s_{2n+1}) is dalend.
- Er geldt $s_{2n} \leq s_{2n-1} \leq s_1$ en $s_{2n+1} \geq s_{2n} \geq s_2$ voor alle n.
- Dus de begrensde monotone rijen (s_{2n}) en (s_{2n+1}) hebben eindige limieten



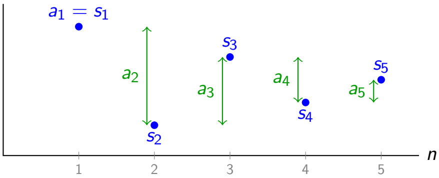
Alternerende reeksen

Stelling 15.3

Zij $a_1 \geq a_2 \geq \cdots$ een dalende rij van positieve getallen met $\lim a_n = 0$. Dan convergeert $\sum (-1)^{n+1} a_n$.

We schrijven $s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k$ voor de partiële sommen.

- De deelrij (s_{2n}) is stijgend en (s_{2n+1}) is dalend.
- Er geldt $s_{2n} \leq s_{2n-1} \leq s_1$ en $s_{2n+1} \geq s_{2n} \geq s_2$ voor alle n.
- Dus de begrensde monotone rijen (s_{2n}) en (s_{2n+1}) hebben eindige limieten, zeg $s_{2n} \to s$ en $s_{2n+1} \to t$.



Alternerende reeksen

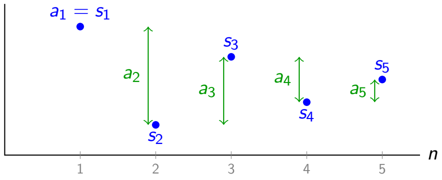
Stelling 15.3

Zij $a_1 \geq a_2 \geq \cdots$ een dalende rij van positieve getallen met $\lim a_n = 0$. Dan convergeert $\sum(-1)^{n+1} a_n$.

We schrijven $s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k$ voor de partiële sommen.

- De deelrij (s_{2n}) is stijgend en (s_{2n+1}) is dalend.
- Er geldt $s_{2n} \leq s_{2n-1} \leq s_1$ en $s_{2n+1} \geq s_{2n} \geq s_2$ voor alle n.
- Dus de begrensde monotone rijen (s_{2n}) en (s_{2n+1}) hebben eindige limieten, zeg $s_{2n} \to s$ en $s_{2n+1} \to t$. Dan volgt

$$t - s$$



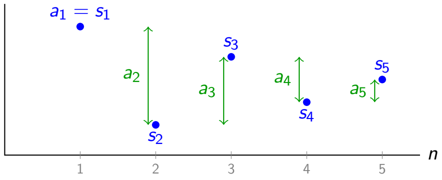
Stelling 15.3

Zij $a_1 \geq a_2 \geq \cdots$ een dalende rij van positieve getallen met $\lim a_n = 0$. Dan convergeert $\sum(-1)^{n+1} a_n$.

We schrijven $s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k$ voor de partiële sommen.

- De deelrij (s_{2n}) is stijgend en (s_{2n+1}) is dalend.
- Er geldt $s_{2n} \leq s_{2n-1} \leq s_1$ en $s_{2n+1} \geq s_{2n} \geq s_2$ voor alle n.
- Dus de begrensde monotone rijen (s_{2n}) en (s_{2n+1}) hebben eindige limieten, zeg $s_{2n} \to s$ en $s_{2n+1} \to t$. Dan volgt

$$t - s = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} - \lim_{n\to\infty} s_n$$



Alternerende reeksen

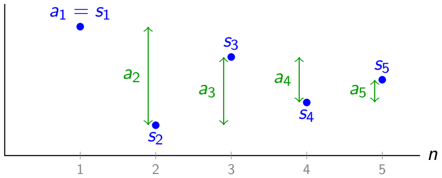
Stelling 15.3

Zij $a_1 \geq a_2 \geq \cdots$ een dalende rij van positieve getallen met $\lim a_n = 0$. Dan convergeert $\sum (-1)^{n+1} a_n$.

We schrijven $s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k$ voor de partiële sommen.

- De deelrij (s_{2n}) is stijgend en (s_{2n+1}) is dalend.
- Er geldt $s_{2n} \leq s_{2n-1} \leq s_1$ en $s_{2n+1} \geq s_{2n} \geq s_2$ voor alle n.
- Dus de begrensde monotone rijen (s_{2n}) en (s_{2n+1}) hebben eindige limieten, zeg $s_{2n} \to s$ en $s_{2n+1} \to t$. Dan volgt

$$t - s = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} - \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} (s_{2n+1} - s_{2n})$$



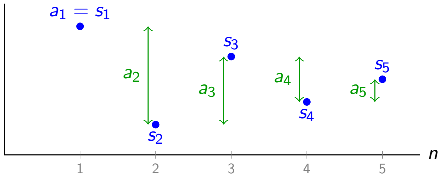
Stelling 15.3

Zij $a_1 \geq a_2 \geq \cdots$ een dalende rij van positieve getallen met $\lim a_n = 0$. Dan convergeert $\sum(-1)^{n+1} a_n$.

We schrijven $s_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} a_k$ voor de partiële sommen.

- De deelrij (s_{2n}) is stijgend en (s_{2n+1}) is dalend.
- Er geldt $s_{2n} \leq s_{2n-1} \leq s_1$ en $s_{2n+1} \geq s_{2n} \geq s_2$ voor alle n.
- Dus de begrensde monotone rijen (s_{2n}) en (s_{2n+1}) hebben eindige limieten, zeg $s_{2n} \to s$ en $s_{2n+1} \to t$. Dan volgt

$$t - s = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} - \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} (s_{2n+1} - s_{2n}) = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1}$$



Alternerende reeksen

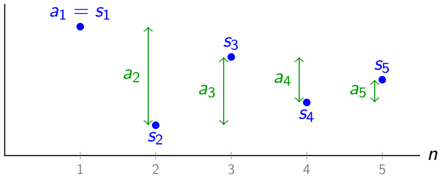
Stelling 15.3

Zij $a_1 \geq a_2 \geq \cdots$ een dalende rij van positieve getallen met $\lim a_n = 0$. Dan convergeert $\sum(-1)^{n+1}a_n$.

We schrijven $s_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k$ voor de partiële sommen.

- De deelrij (s_{2n}) is stijgend en (s_{2n+1}) is dalend.
- Er geldt $s_{2n} \leq s_{2n-1} \leq s_1$ en $s_{2n+1} \geq s_{2n} \geq s_2$ voor alle n.
- Dus de begrensde monotone rijen (s_{2n}) en (s_{2n+1}) hebben eindige limieten, zeg $s_{2n} \to s$ en $s_{2n+1} \to t$. Dan volgt

$$t - s = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} - \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} (s_{2n+1} - s_{2n}) = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0.$$



Alternerende reeksen

Stelling 15.3

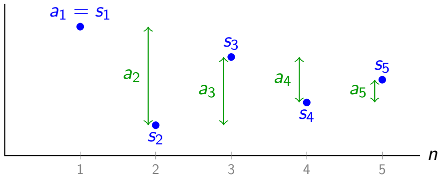
Zij $a_1 \geq a_2 \geq \cdots$ een dalende rij van positieve getallen met $\lim a_n = 0$. Dan convergeert $\sum(-1)^{n+1}a_n$.

We schrijven $s_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k$ voor de partiële sommen.

- De deelrij (s_{2n}) is stijgend en (s_{2n+1}) is dalend.
- Er geldt $s_{2n} \leq s_{2n-1} \leq s_1$ en $s_{2n+1} \geq s_{2n} \geq s_2$ voor alle n.
- Dus de begrensde monotone rijen (s_{2n}) en (s_{2n+1}) hebben eindige limieten, zeg $s_{2n} \to s$ en $s_{2n+1} \to t$. Dan volgt

$$t - s = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} - \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}(s_{2n+1} - s_{2n}) = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0.$$

- Er volgt $t = s$



Alternerende reeksen

Stelling 15.3

Zij $a_1 \geq a_2 \geq \cdots$ een dalende rij van positieve getallen met $\lim a_n = 0$. Dan convergeert $\sum(-1)^{n+1} a_n$.

We schrijven $s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k$ voor de partiële sommen.

- De deelrij (s_{2n}) is stijgend en (s_{2n+1}) is dalend.
- Er geldt $s_{2n} \leq s_{2n-1} \leq s_1$ en $s_{2n+1} \geq s_{2n} \geq s_2$ voor alle n.
- Dus de begrensde monotone rijen (s_{2n}) en (s_{2n+1}) hebben eindige limieten, zeg $s_{2n} \to s$ en $s_{2n+1} \to t$. Dan volgt

$$t - s = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} - \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} (s_{2n+1} - s_{2n}) = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0.$$

- Er volgt $t = s$, dus $\lim_{n\to\infty} s_n = s$.