

## Analyse: van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}^n$ hoorcollege Machtreeksen (3)

Gerrit Oomens  
G.Oomens@uva.nl

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde  
Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica  
Universiteit van Amsterdam



De **polynomen** vormen een klasse functies van de vorm

$$f(x) = \sum_{n=0}^N a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{N-1} x^{N-1} + a_N x^N.$$

We kunnen dit uitbreiden naar zogenaamde **machtreeksen**:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

Als een dergelijke machtreeks convergeert, definieert  $f$  een functie op (een deelverzameling) van  $\mathbb{R}$ .

## Convergentie van machtreeksen

Bekijk een machtreeks  $\sum a_n x^n$ . Voor welke  $x$  convergeert deze?

We passen het wortelkenmerk toe en kijken naar

$$\alpha = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n x^n|^{1/n} = |x| \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}.$$

De reeks convergeert als  $\alpha < 1$ , dus als

$$|x| < \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}} =: R.$$

We noemen dit getal  $R$  de **convergentiestraal** van de machtreeks. Voor  $|x| > R$  convergeert de reeks zeker niet, voor  $x = \pm R$  weten we het niet. We hebben bewezen:

### Stelling 23.1

Zij  $\sum a_n x^n$  een machtreeks en definieer  $R$  als boven. Dan convergeert de reeks voor  $|x| < R$  en divergeert hij voor  $|x| > R$ .

## Convergentiestraal

### Stelling 23.1

Zij  $\sum a_n x^n$  een machtreeks en definieer  $R = \frac{1}{\limsup |a_n|^{1/n}}$  als boven. Dan convergeert de reeks voor  $|x| < R$  en divergeert voor  $|x| > R$ .

Voorbeeld:  $\sum x^n$ . Er geldt  $R = \frac{1}{\limsup 1^{1/n}} = 1$ . De reeks convergeert dus zeker op  $(-1, 1)$ . Merk op dat de reeks in  $x = \pm 1$  niet convergeert: het **interval van convergentie** is  $(-1, 1)$ .

Herinner: als  $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$  bestaat, dan is deze limiet gelijk aan  $\limsup |a_n|^{1/n}$ . Dit is soms makkelijker, bijvoorbeeld bij  $\sum \frac{1}{n!} x^n$ . Hier is

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0,$$

dus  $R = \infty$ . De reeks convergeert dus op heel  $\mathbb{R}$ .

## Machtreeksen en convergentie van functies

Een machtreeks definieert een functie  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  op het interval van convergentie  $I$ . Deze functie is de limiet van de functies

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k :$$

voor elke  $x \in I$  geldt  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = f(x)$ . De  $s_n$  zijn polynomen, dus continu en differentieerbaar. Betekent dit dat  $f$  dat ook is?

Meer algemeen: stel dat we een rij continue functies  $f_n$  hebben met  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  voor elke  $x$  in een zeker interval. Is  $f$  dan continu op dat interval?