Analyse: van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}^n$ hoorcollege

Uniforme convergentie van reeksen (5)

Gerrit Oomens
G.Oomens@uva.nl

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica
Universiteit van Amsterdam

Uniforme convergentie

Definitie 24.2

Zij (f_n) een rij reëelwaardige functies op $S \subseteq \mathbb{R}$. We zeggen dat (f_n) uniform convergeert naar f als

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \text{voor alle} \quad x \in S \quad \text{als} \quad n > N.$$

Uniforme convergentie

Definitie 24.2

Zij (f_n) een rij reëelwaardige functies op $S \subseteq \mathbb{R}$. We zeggen dat (f_n) uniform convergeert naar f als

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \text{voor alle} \quad x \in S \quad \text{als} \quad n > N.$$

Definitie 25.3

We zeggen dat een rij reëelwaardige functies (f_n) op $S \subseteq \mathbb{R}$ uniform Cauchy is als

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon \quad \text{voor alle} \quad x \in S \quad \text{als} \quad n, m > N.$$

Uniforme convergentie

Definitie 24.2

Zij (f_n) een rij reëelwaardige functies op $S \subseteq \mathbb{R}$. We zeggen dat (f_n) uniform convergeert naar f als

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \text{voor alle} \quad x \in S \quad \text{als} \quad n > N.$$

Definitie 25.3

We zeggen dat een rij reëelwaardige functies (f_n) op $S \subseteq \mathbb{R}$ uniform Cauchy is als

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon \quad \text{voor alle} \quad x \in S \quad \text{als} \quad n, m > N.$$

- Een rij functies convergeert uniform desda de rij uniform Cauchy is.

Uniforme convergentie

Definitie 24.2

Zij (f_n) een rij reëelwaardige functies op $S \subseteq \mathbb{R}$. We zeggen dat (f_n) uniform convergeert naar f als

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \text{voor alle} \quad x \in S \quad \text{als} \quad n > N.$$

Definitie 25.3

We zeggen dat een rij reëelwaardige functies (f_n) op $S \subseteq \mathbb{R}$ uniform Cauchy is als

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon \quad \text{voor alle} \quad x \in S \quad \text{als} \quad n, m > N.$$

- Een rij functies convergeert uniform desda de rij uniform Cauchy is.
- Als (f_n) een rij continu functies is met $f_n \to f$ uniform op een verzameling $S \subseteq \mathbb{R}$, dan is f continu op S.

Uniforme convergentie

Definitie 24.2

Zij (f_n) een rij reëelwaardige functies op $S \subseteq \mathbb{R}$. We zeggen dat (f_n) uniform convergeert naar f als

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \text{voor alle} \quad x \in S \quad \text{als} \quad n > N.$$

Definitie 25.3

We zeggen dat een rij reëelwaardige functies (f_n) op $S \subseteq \mathbb{R}$ uniform Cauchy is als

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon \quad \text{voor alle} \quad x \in S \quad \text{als} \quad n, m > N.$$

- Een rij functies convergeert uniform desda de rij uniform Cauchy is.
- Als (f_n) een rij continu functies is met $f_n \to f$ uniform op een verzameling $S \subseteq \mathbb{R}$, dan is f continu op S.
- Als $f_n \to f$ uniform op $[a, b]$, dan geldt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Reeksen van functies

Zij (g_k) een rij functies op $S \subseteq \mathbb{R}$ en bekijk nu de reeks

$$\sum_{k=0}^{\infty} g_k(x).$$

Reeksen van functies

Zij (g_k) een rij functies op $S \subseteq \mathbb{R}$ en bekijk nu de reeks

$$\sum_{k=0}^{\infty} g_k(x).$$

De partiële sommen zijn nu ook functies:

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} g_k(x).$$

Reeksen van functies

Zij (g_k) een rij functies op $S \subseteq \mathbb{R}$ en bekijk nu de reeks

$$\sum_{k=0}^{\infty} g_k(x).$$

De partiële sommen zijn nu ook functies:

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} g_k(x).$$

Deze rij functies kan puntsgewijs of uniform convergeren naar een functie f op S.

Reeksen van functies

Zij (g_k) een rij functies op $S \subseteq \mathbb{R}$ en bekijk nu de reeks

$$\sum_{k=0}^{\infty} g_k(x).$$

De partiële sommen zijn nu ook functies:

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} g_k(x).$$

Deze rij functies kan puntsgewijs of uniform convergeren naar een functie f op S. We zeggen dan dat $\sum g_k$ (puntsgewijs/uniform) convergeert.

Reeksen van functies

Zij (g_k) een rij functies op $S \subseteq \mathbb{R}$ en bekijk nu de reeks

$$\sum_{k=0}^{\infty} g_k(x).$$

De partiële sommen zijn nu ook functies:

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} g_k(x).$$

Deze rij functies kan puntsgewijs of uniform convergeren naar een functie f op S. We zeggen dan dat $\sum g_k$ (puntsgewijs/uniform) convergeert. We zien

$$\sum g_k \text{ convergeert uniform}$$

Reeksen van functies

Zij (g_k) een rij functies op $S \subseteq \mathbb{R}$ en bekijk nu de reeks

$$\sum_{k=0}^{\infty} g_k(x).$$

De partiële sommen zijn nu ook functies:

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} g_k(x).$$

Deze rij functies kan puntsgewijs of uniform convergeren naar een functie f op S. We zeggen dan dat $\sum g_k$ (puntsgewijs/uniform) convergeert. We zien

$$\sum g_k \text{ convergeert uniform} \quad \Leftrightarrow \quad (s_n) \text{ convergeert uniform}$$

Reeksen van functies

Zij (g_k) een rij functies op $S \subseteq \mathbb{R}$ en bekijk nu de reeks

$$\sum_{k=0}^{\infty} g_k(x).$$

De partiële sommen zijn nu ook functies:

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} g_k(x).$$

Deze rij functies kan puntsgewijs of uniform convergeren naar een functie f op S. We zeggen dan dat $\sum g_k$ (puntsgewijs/uniform) convergeert. We zien

$$\begin{aligned} \sum g_k \text{ convergeert uniform} \quad &\Leftrightarrow \quad (s_n) \text{ convergeert uniform} \\ &\Leftrightarrow \quad (s_n) \text{ is uniform Cauchy.} \end{aligned}$$

Reeksen van functies

Zij (g_k) een rij functies op $S \subseteq \mathbb{R}$ en bekijk nu de reeks

$$\sum_{k=0}^{\infty} g_k(x).$$

De partiële sommen zijn nu ook functies:

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} g_k(x).$$

Deze rij functies kan puntsgewijs of uniform convergeren naar een functie f op S. We zeggen dan dat $\sum g_k$ (puntsgewijs/uniform) convergeert. We zien

$$\begin{aligned} \sum g_k \text{ convergeert uniform} \quad &\Leftrightarrow \quad (s_n) \text{ convergeert uniform} \\ &\Leftrightarrow \quad (s_n) \text{ is uniform Cauchy.} \end{aligned}$$

Dit laatste geeft het uniforme Cauchy criterium:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad \left| \sum_{k=m}^{n} g_k(x) \right| < \epsilon \quad \text{voor alle} \quad x \in S \quad \text{als} \quad n \geq m > N.$$

Uniforme convergentie en continuïteit

Stelling 25.6

Een reeks $\sum g_k$ van functies convergeert uniform op S desda hij voldoet aan het uniforme Cauchy criterium:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad \left| \sum_{k=m}^{n} g_k(x) \right| < \epsilon \quad \text{voor alle} \quad x \in S \quad \text{als} \quad n \geq m > N.$$

Uniforme convergentie en continuïteit

Stelling 25.6

Een reeks $\sum g_k$ van functies convergeert uniform op S desda hij voldoet aan het uniforme Cauchy criterium:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad \left| \sum_{k=m}^{n} g_k(x) \right| < \epsilon \quad \text{voor alle} \quad x \in S \quad \text{als} \quad n \geq m > N.$$

Stel dat (g_k) een rij continue functies is en bekijk $\sum_{k=0}^{\infty} g_k$.

Uniforme convergentie en continuïteit

Stelling 25.6

Een reeks $\sum g_k$ van functies convergeert uniform op S desda hij voldoet aan het uniforme Cauchy criterium:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad \left| \sum_{k=m}^{n} g_k(x) \right| < \epsilon \quad \text{voor alle} \quad x \in S \quad \text{als} \quad n \geq m > N.$$

Stel dat (g_k) een rij continue functies is en bekijk $\sum_{k=0}^{\infty} g_k$. Dan is

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} g_k(x)$$

Uniforme convergentie en continuïteit

Stelling 25.6

Een reeks $\sum g_k$ van functies convergeert uniform op S desda hij voldoet aan het uniforme Cauchy criterium:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad \left| \sum_{k=m}^{n} g_k(x) \right| < \epsilon \quad \text{voor alle} \quad x \in S \quad \text{als} \quad n \geq m > N.$$

Stel dat (g_k) een rij continue functies is en bekijk $\sum_{k=0}^{\infty} g_k$. Dan is

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} g_k(x)$$

continu voor alle n

Uniforme convergentie en continuïteit

Stelling 25.6

Een reeks $\sum g_k$ van functies convergeert uniform op S desda hij voldoet aan het uniforme Cauchy criterium:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad \left| \sum_{k=m}^{n} g_k(x) \right| < \epsilon \quad \text{voor alle} \quad x \in S \quad \text{als} \quad n \geq m > N.$$

Stel dat (g_k) een rij continue functies is en bekijk $\sum_{k=0}^{\infty} g_k$. Dan is

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} g_k(x)$$

continu voor alle n, dus als de reeks uniform convergeert is

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x)$$

Uniforme convergentie en continuïteit

Stelling 25.6

Een reeks $\sum g_k$ van functies convergeert uniform op S desda hij voldoet aan het uniforme Cauchy criterium:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad \left| \sum_{k=m}^{n} g_k(x) \right| < \epsilon \quad \text{voor alle} \quad x \in S \quad \text{als} \quad n \geq m > N.$$

Stel dat (g_k) een rij continue functies is en bekijk $\sum_{k=0}^{\infty} g_k$. Dan is

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} g_k(x)$$

continu voor alle n, dus als de reeks uniform convergeert is

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x)$$

een continue functie op S.

Uniforme convergentie van reeksen

Stelling 25.6

Een reeks $\sum g_k$ van functies convergeert uniform op S desda hij voldoet aan het uniforme Cauchy criterium:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad \left| \sum_{k=m}^{n} g_k(x) \right| < \epsilon \quad \text{voor alle} \quad x \in S \quad \text{als} \quad n \geq m > N.$$

Uniforme convergentie van reeksen

Stelling 25.6

Een reeks $\sum g_k$ van functies convergeert uniform op S desda hij voldoet aan het uniforme Cauchy criterium:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad \left| \sum_{k=m}^{n} g_k(x) \right| < \epsilon \quad \text{voor alle} \quad x \in S \quad \text{als} \quad n \geq m > N.$$

Als gevolg hiervan een simpele methode om in te zien of een reeks uniform convergeert:

Uniforme convergentie van reeksen

Stelling 25.6

Een reeks $\sum g_k$ van functies convergeert uniform op S desda hij voldoet aan het uniforme Cauchy criterium:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad \left| \sum_{k=m}^{n} g_k(x) \right| < \epsilon \quad \text{voor alle} \quad x \in S \quad \text{als} \quad n \geq m > N.$$

Als gevolg hiervan een simpele methode om in te zien of een reeks uniform convergeert:

Stelling 25.7 (Weierstrass M-test)

Zij (M_k) een rij positieve getallen en (g_k) een rij functies op $S \subseteq \mathbb{R}$ zodat $|g_k(x)| \leq M_k$ voor alle $x \in S$. Als $\sum M_k < \infty$, dan convergeert $\sum g_k$ uniform op S.

Uniforme convergentie van reeksen

Stelling 25.6

Een reeks $\sum g_k$ van functies convergeert uniform op S desda hij voldoet aan het uniforme Cauchy criterium:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad \left| \sum_{k=m}^{n} g_k(x) \right| < \epsilon \quad \text{voor alle} \quad x \in S \quad \text{als} \quad n \geq m > N.$$

Als gevolg hiervan een simpele methode om in te zien of een reeks uniform convergeert:

Stelling 25.7 (Weierstrass M-test)

Zij (M_k) een rij positieve getallen en (g_k) een rij functies op $S \subseteq \mathbb{R}$ zodat $|g_k(x)| \leq M_k$ voor alle $x \in S$. Als $\sum M_k < \infty$, dan convergeert $\sum g_k$ uniform op S.

Bewijs: zij $\epsilon > 0$.

Uniforme convergentie van reeksen

Stelling 25.6

Een reeks $\sum g_k$ van functies convergeert uniform op S desda hij voldoet aan het uniforme Cauchy criterium:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad \left| \sum_{k=m}^{n} g_k(x) \right| < \epsilon \quad \text{voor alle} \quad x \in S \quad \text{als} \quad n \geq m > N.$$

Als gevolg hiervan een simpele methode om in te zien of een reeks uniform convergeert:

Stelling 25.7 (Weierstrass M-test)

Zij (M_k) een rij positieve getallen en (g_k) een rij functies op $S \subseteq \mathbb{R}$ zodat $|g_k(x)| \leq M_k$ voor alle $x \in S$. Als $\sum M_k < \infty$, dan convergeert $\sum g_k$ uniform op S.

Bewijs: zij $\epsilon > 0$. De reeks $\sum M_k$ convergeert, dus voldoet aan het Cauchy criterium

Uniforme convergentie van reeksen

Stelling 25.6

Een reeks $\sum g_k$ van functies convergeert uniform op S desda hij voldoet aan het uniforme Cauchy criterium:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad \left| \sum_{k=m}^{n} g_k(x) \right| < \epsilon \quad \text{voor alle} \quad x \in S \quad \text{als} \quad n \geq m > N.$$

Als gevolg hiervan een simpele methode om in te zien of een reeks uniform convergeert:

Stelling 25.7 (Weierstrass M-test)

Zij (M_k) een rij positieve getallen en (g_k) een rij functies op $S \subseteq \mathbb{R}$ zodat $|g_k(x)| \leq M_k$ voor alle $x \in S$. Als $\sum M_k < \infty$, dan convergeert $\sum g_k$ uniform op S.

Bewijs: zij $\epsilon > 0$. De reeks $\sum M_k$ convergeert, dus voldoet aan het Cauchy criterium: er is een N zodat voor $n \geq m > N$ geldt $|\sum_{k=m}^{n} M_k| < \epsilon$.

Uniforme convergentie van reeksen

Stelling 25.6

Een reeks $\sum g_k$ van functies convergeert uniform op S desda hij voldoet aan het uniforme Cauchy criterium:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad \left|\sum_{k=m}^{n} g_k(x)\right| < \epsilon \quad \text{voor alle} \quad x \in S \quad \text{als} \quad n \geq m > N.$$

Als gevolg hiervan een simpele methode om in te zien of een reeks uniform convergeert:

Stelling 25.7 (Weierstrass M-test)

Zij (M_k) een rij positieve getallen en (g_k) een rij functies op $S \subseteq \mathbb{R}$ zodat $|g_k(x)| \leq M_k$ voor alle $x \in S$. Als $\sum M_k < \infty$, dan convergeert $\sum g_k$ uniform op S.

Bewijs: zij $\epsilon > 0$. De reeks $\sum M_k$ convergeert, dus voldoet aan het Cauchy criterium: er is een N zodat voor $n \geq m > N$ geldt $|\sum_{k=m}^{n} M_k| < \epsilon$. Dan is

$$\left|\sum_{k=m}^{n} g_k(x)\right|$$

Uniforme convergentie van reeksen

Stelling 25.6

Een reeks $\sum g_k$ van functies convergeert uniform op S desda hij voldoet aan het uniforme Cauchy criterium:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad \left| \sum_{k=m}^{n} g_k(x) \right| < \epsilon \quad \text{voor alle} \quad x \in S \quad \text{als} \quad n \geq m > N.$$

Als gevolg hiervan een simpele methode om in te zien of een reeks uniform convergeert:

Stelling 25.7 (Weierstrass M-test)

Zij (M_k) een rij positieve getallen en (g_k) een rij functies op $S \subseteq \mathbb{R}$ zodat $|g_k(x)| \leq M_k$ voor alle $x \in S$. Als $\sum M_k < \infty$, dan convergeert $\sum g_k$ uniform op S.

Bewijs: zij $\epsilon > 0$. De reeks $\sum M_k$ convergeert, dus voldoet aan het Cauchy criterium: er is een N zodat voor $n \geq m > N$ geldt $|\sum_{k=m}^{n} M_k| < \epsilon$. Dan is

$$\left| \sum_{k=m}^{n} g_k(x) \right| \leq \sum_{k=m}^{n} |g_k(x)|$$

Uniforme convergentie van reeksen

Stelling 25.6

Een reeks $\sum g_k$ van functies convergeert uniform op S desda hij voldoet aan het uniforme Cauchy criterium:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad \left| \sum_{k=m}^{n} g_k(x) \right| < \epsilon \quad \text{voor alle} \quad x \in S \quad \text{als} \quad n \geq m > N.$$

Als gevolg hiervan een simpele methode om in te zien of een reeks uniform convergeert:

Stelling 25.7 (Weierstrass M-test)

Zij (M_k) een rij positieve getallen en (g_k) een rij functies op $S \subseteq \mathbb{R}$ zodat $|g_k(x)| \leq M_k$ voor alle $x \in S$. Als $\sum M_k < \infty$, dan convergeert $\sum g_k$ uniform op S.

Bewijs: zij $\epsilon > 0$. De reeks $\sum M_k$ convergeert, dus voldoet aan het Cauchy criterium: er is een N zodat voor $n \geq m > N$ geldt $|\sum_{k=m}^{n} M_k| < \epsilon$. Dan is

$$\left| \sum_{k=m}^{n} g_k(x) \right| \leq \sum_{k=m}^{n} |g_k(x)| \leq \sum_{k=m}^{n} M_k$$

Uniforme convergentie van reeksen

Stelling 25.6

Een reeks $\sum g_k$ van functies convergeert uniform op S desda hij voldoet aan het uniforme Cauchy criterium:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad \left| \sum_{k=m}^{n} g_k(x) \right| < \epsilon \quad \text{voor alle} \quad x \in S \quad \text{als} \quad n \geq m > N.$$

Als gevolg hiervan een simpele methode om in te zien of een reeks uniform convergeert:

Stelling 25.7 (Weierstrass M-test)

Zij (M_k) een rij positieve getallen en (g_k) een rij functies op $S \subseteq \mathbb{R}$ zodat $|g_k(x)| \leq M_k$ voor alle $x \in S$. Als $\sum M_k < \infty$, dan convergeert $\sum g_k$ uniform op S.

Bewijs: zij $\epsilon > 0$. De reeks $\sum M_k$ convergeert, dus voldoet aan het Cauchy criterium: er is een N zodat voor $n \geq m > N$ geldt $|\sum_{k=m}^{n} M_k| < \epsilon$. Dan is

$$\left| \sum_{k=m}^{n} g_k(x) \right| \leq \sum_{k=m}^{n} |g_k(x)| \leq \sum_{k=m}^{n} M_k < \epsilon.$$

Uniforme convergentie van reeksen

Stelling 25.6

Een reeks $\sum g_k$ van functies convergeert uniform op S desda hij voldoet aan het uniforme Cauchy criterium:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad \left| \sum_{k=m}^{n} g_k(x) \right| < \epsilon \quad \text{voor alle} \quad x \in S \quad \text{als} \quad n \geq m > N.$$

Als gevolg hiervan een simpele methode om in te zien of een reeks uniform convergeert:

Stelling 25.7 (Weierstrass M-test)

Zij (M_k) een rij positieve getallen en (g_k) een rij functies op $S \subseteq \mathbb{R}$ zodat $|g_k(x)| \leq M_k$ voor alle $x \in S$. Als $\sum M_k < \infty$, dan convergeert $\sum g_k$ uniform op S.

Bewijs: zij $\epsilon > 0$. De reeks $\sum M_k$ convergeert, dus voldoet aan het Cauchy criterium: er is een N zodat voor $n \geq m > N$ geldt $|\sum_{k=m}^{n} M_k| < \epsilon$. Dan is

$$\left| \sum_{k=m}^{n} g_k(x) \right| \leq \sum_{k=m}^{n} |g_k(x)| \leq \sum_{k=m}^{n} M_k < \epsilon.$$

We zien dat $\sum g_k$ aan het uniforme Cauchy criterium voldoet. $\square$

Voorbeeld

Stelling 25.7 (Weierstrass M-test)

Zij (M_k) een rij positieve getallen en (g_k) een rij functies op $S \subseteq \mathbb{R}$ zodat $|g_k(x)| \leq M_k$ voor alle $x \in S$. Als $\sum M_k < \infty$, dan convergeert $\sum g_k$ uniform op S.

Bekijk de machtreeks $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} x^k$.

Voorbeeld

Stelling 25.7 (Weierstrass M-test)

Zij (M_k) een rij positieve getallen en (g_k) een rij functies op $S \subseteq \mathbb{R}$ zodat $|g_k(x)| \leq M_k$ voor alle $x \in S$. Als $\sum M_k < \infty$, dan convergeert $\sum g_k$ uniform op S.

Bekijk de machtreeks $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} x^k$. Deze heeft convergentiestraal 2.

Voorbeeld

Stelling 25.7 (Weierstrass M-test)

Zij (M_k) een rij positieve getallen en (g_k) een rij functies op $S \subseteq \mathbb{R}$ zodat $|g_k(x)| \leq M_k$ voor alle $x \in S$. Als $\sum M_k < \infty$, dan convergeert $\sum g_k$ uniform op S.

Bekijk de machtreeks $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} x^k$. Deze heeft convergentiestraal 2. Op $(-2, 2)$ geldt

$$|2^{-k} x^k|$$

Voorbeeld

Stelling 25.7 (Weierstrass M-test)

Zij (M_k) een rij positieve getallen en (g_k) een rij functies op $S \subseteq \mathbb{R}$ zodat $|g_k(x)| \leq M_k$ voor alle $x \in S$. Als $\sum M_k < \infty$, dan convergeert $\sum g_k$ uniform op S.

Bekijk de machtreeks $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} x^k$. Deze heeft convergentiestraal 2. Op $(-2, 2)$ geldt

$$|2^{-k} x^k| \leq 2^{-k} \cdot 2^k$$

Voorbeeld

Stelling 25.7 (Weierstrass M-test)

Zij (M_k) een rij positieve getallen en (g_k) een rij functies op $S \subseteq \mathbb{R}$ zodat $|g_k(x)| \leq M_k$ voor alle $x \in S$. Als $\sum M_k < \infty$, dan convergeert $\sum g_k$ uniform op S.

Bekijk de machtreeks $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} x^k$. Deze heeft convergentiestraal 2. Op $(-2, 2)$ geldt

$$|2^{-k} x^k| \leq 2^{-k} \cdot 2^k = 1.$$

Voorbeeld

Stelling 25.7 (Weierstrass M-test)

Zij (M_k) een rij positieve getallen en (g_k) een rij functies op $S \subseteq \mathbb{R}$ zodat $|g_k(x)| \leq M_k$ voor alle $x \in S$. Als $\sum M_k < \infty$, dan convergeert $\sum g_k$ uniform op S.

Bekijk de machtreeks $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} x^k$. Deze heeft convergentiestraal 2. Op $(-2, 2)$ geldt

$$|2^{-k} x^k|$$

Voorbeeld

Stelling 25.7 (Weierstrass M-test)

Zij (M_k) een rij positieve getallen en (g_k) een rij functies op $S \subseteq \mathbb{R}$ zodat $|g_k(x)| \leq M_k$ voor alle $x \in S$. Als $\sum M_k < \infty$, dan convergeert $\sum g_k$ uniform op S.

Bekijk de machtreeks $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} x^k$. Deze heeft convergentiestraal 2. Op $[-a, a]$ geldt

$$|2^{-k} x^k|$$

Voorbeeld

Stelling 25.7 (Weierstrass M-test)

Zij (M_k) een rij positieve getallen en (g_k) een rij functies op $S \subseteq \mathbb{R}$ zodat $|g_k(x)| \leq M_k$ voor alle $x \in S$. Als $\sum M_k < \infty$, dan convergeert $\sum g_k$ uniform op S.

Bekijk de machtreeks $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} x^k$. Deze heeft convergentiestraal 2. Op $[-a, a]$ geldt

$$|2^{-k} x^k| \leq 2^{-k} \cdot a^k$$

Voorbeeld

Stelling 25.7 (Weierstrass M-test)

Zij (M_k) een rij positieve getallen en (g_k) een rij functies op $S \subseteq \mathbb{R}$ zodat $|g_k(x)| \leq M_k$ voor alle $x \in S$. Als $\sum M_k < \infty$, dan convergeert $\sum g_k$ uniform op S.

Bekijk de machtreeks $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} x^k$. Deze heeft convergentiestraal 2. Op $[-a, a]$ geldt

$$|2^{-k} x^k| \leq 2^{-k} \cdot a^k = \left(\tfrac{a}{2}\right)^k$$

Voorbeeld

Stelling 25.7 (Weierstrass M-test)

Zij (M_k) een rij positieve getallen en (g_k) een rij functies op $S \subseteq \mathbb{R}$ zodat $|g_k(x)| \leq M_k$ voor alle $x \in S$. Als $\sum M_k < \infty$, dan convergeert $\sum g_k$ uniform op S.

Bekijk de machtreeks $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} x^k$. Deze heeft convergentiestraal 2. Op $[-a, a]$ geldt

$$|2^{-k} x^k| \leq 2^{-k} \cdot a^k = \left(\frac{a}{2}\right)^k$$

en voor $a < 2$ convergeert $\sum_k \left(\frac{a}{2}\right)^k$.

Voorbeeld

Stelling 25.7 (Weierstrass M-test)

Zij (M_k) een rij positieve getallen en (g_k) een rij functies op $S \subseteq \mathbb{R}$ zodat $|g_k(x)| \leq M_k$ voor alle $x \in S$. Als $\sum M_k < \infty$, dan convergeert $\sum g_k$ uniform op S.

Bekijk de machtreeks $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} x^k$. Deze heeft convergentiestraal 2. Op $[-a, a]$ geldt

$$|2^{-k} x^k| \leq 2^{-k} \cdot a^k = \left(\frac{a}{2}\right)^k$$

en voor $a < 2$ convergeert $\sum_k \left(\frac{a}{2}\right)^k$. Dus kunnen we de M-test toepassen met $M_k = \left(\frac{a}{2}\right)^k$

Voorbeeld

Stelling 25.7 (Weierstrass M-test)

Zij (M_k) een rij positieve getallen en (g_k) een rij functies op $S \subseteq \mathbb{R}$ zodat $|g_k(x)| \leq M_k$ voor alle $x \in S$. Als $\sum M_k < \infty$, dan convergeert $\sum g_k$ uniform op S.

Bekijk de machtreeks $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} x^k$. Deze heeft convergentiestraal 2. Op $[-a, a]$ geldt

$$|2^{-k} x^k| \leq 2^{-k} \cdot a^k = \left(\frac{a}{2}\right)^k$$

en voor $a < 2$ convergeert $\sum_k \left(\frac{a}{2}\right)^k$. Dus kunnen we de M-test toepassen met $M_k = \left(\frac{a}{2}\right)^k$ om te zien dat de reeks uniform convergeert op $[-a, a]$ voor alle $a < 2$.

Voorbeeld

Stelling 25.7 (Weierstrass M-test)

Zij (M_k) een rij positieve getallen en (g_k) een rij functies op $S \subseteq \mathbb{R}$ zodat $|g_k(x)| \leq M_k$ voor alle $x \in S$. Als $\sum M_k < \infty$, dan convergeert $\sum g_k$ uniform op S.

Bekijk de machtreeks $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} x^k$. Deze heeft convergentiestraal 2. Op $[-a, a]$ geldt

$$|2^{-k} x^k| \leq 2^{-k} \cdot a^k = \left(\tfrac{a}{2}\right)^k$$

en voor $a < 2$ convergeert $\sum_k \left(\frac{a}{2}\right)^k$. Dus kunnen we de M-test toepassen met $M_k = \left(\frac{a}{2}\right)^k$ om te zien dat de reeks uniform convergeert op $[-a, a]$ voor alle $a < 2$.

Op $[-2, 2]$ hebben we geen uniforme convergentie, want:

Voorbeeld

Stelling 25.7 (Weierstrass M-test)

Zij (M_k) een rij positieve getallen en (g_k) een rij functies op $S \subseteq \mathbb{R}$ zodat $|g_k(x)| \leq M_k$ voor alle $x \in S$. Als $\sum M_k < \infty$, dan convergeert $\sum g_k$ uniform op S.

Bekijk de machtreeks $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} x^k$. Deze heeft convergentiestraal 2. Op $[-a, a]$ geldt

$$|2^{-k} x^k| \leq 2^{-k} \cdot a^k = \left(\frac{a}{2}\right)^k$$

en voor $a < 2$ convergeert $\sum_k \left(\frac{a}{2}\right)^k$. Dus kunnen we de M-test toepassen met $M_k = \left(\frac{a}{2}\right)^k$ om te zien dat de reeks uniform convergeert op $[-a, a]$ voor alle $a < 2$.

Op $[-2, 2]$ hebben we geen uniforme convergentie, want:

Lemma

Stel dat $\sum g_k$ uniform convergeert op S. Dan geldt $g_k \to 0$ uniform op S.