

# Analyse: van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}^n$ hoorcollege

## Uniforme convergentie van reeksen (5)

Gerrit Oomens  
G.Oomens@uva.nl

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde  
Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica  
Universiteit van Amsterdam



## Reeksen van functies

Zij  $(g_k)$  een rij functies op  $S \subseteq \mathbb{R}$  en bekijk nu de reeks

$$\sum_{k=0}^{\infty} g_k(x).$$

De partiële sommen zijn nu ook functies:

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^n g_k(x).$$

Deze rij functies kan puntsgewijs of uniform convergeren naar een functie  $f$  op  $S$ . We zeggen dan dat  $\sum g_k$  (puntsgewijs/uniform) convergeert. We zien

$$\begin{aligned} \sum g_k \text{ convergeert uniform} &\Leftrightarrow (s_n) \text{ convergeert uniform} \\ &\Leftrightarrow (s_n) \text{ is uniform Cauchy.} \end{aligned}$$

Dit laatste geeft het **uniforme Cauchy criterium**:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad \left| \sum_{k=m}^n g_k(x) \right| < \epsilon \quad \text{voor alle} \quad x \in S \quad \text{als} \quad n \geq m > N.$$

## Uniforme convergentie

### Definitie 24.2

Zij  $(f_n)$  een rij reëelwaardige functies op  $S \subseteq \mathbb{R}$ . We zeggen dat  $(f_n)$  **uniform convergeert** naar  $f$  als

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \text{voor alle} \quad x \in S \quad \text{als} \quad n > N.$$

### Definitie 25.3

We zeggen dat een rij reëelwaardige functies  $(f_n)$  op  $S \subseteq \mathbb{R}$  **uniform Cauchy** is als

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon \quad \text{voor alle} \quad x \in S \quad \text{als} \quad n, m > N.$$

- Een rij functies convergeert uniform desda de rij uniform Cauchy is.
- Als  $(f_n)$  een rij continue functies is met  $f_n \rightarrow f$  uniform op een verzameling  $S \subseteq \mathbb{R}$ , dan is  $f$  continu op  $\mathbb{R}$ .
- Als  $f_n \rightarrow f$  uniform op  $[a, b]$ , dan geldt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx.$$

## Uniforme convergentie en continuïteit

### Stelling 25.6

Een reeks  $\sum g_k$  van functies convergeert uniform op  $S$  desda hij voldoet aan het uniforme Cauchy criterium:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad \left| \sum_{k=m}^n g_k(x) \right| < \epsilon \quad \text{voor alle} \quad x \in S \quad \text{als} \quad n \geq m > N.$$

Stel dat  $(g_k)$  een rij continue functies is en bekijk  $\sum_{k=0}^{\infty} g_k$ . Dan is

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^n g_k(x)$$

continu voor alle  $n$ , dus als de reeks uniform convergeert is

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x)$$

een continue functie op  $S$ .

## Uniforme convergentie van reeksen

### Stelling 25.6

Een reeks  $\sum g_k$  van functies convergeert uniform op  $S$  desda hij voldoet aan het uniforme Cauchy criterium:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{zodat} \quad \left| \sum_{k=m}^n g_k(x) \right| < \epsilon \quad \text{voor alle} \quad x \in S \quad \text{als} \quad n \geq m > N.$$

Als gevolg hiervan een simpele methode om in te zien of een reeks uniform convergeert:

### Stelling 25.7 (Weierstrass $M$ -test)

Zij  $(M_k)$  een rij positieve getallen en  $(g_k)$  een rij functies op  $S \subseteq \mathbb{R}$  zodat  $|g_k(x)| \leq M_k$  voor alle  $x \in S$ . Als  $\sum M_k < \infty$ , dan convergeert  $\sum g_k$  uniform op  $S$ .

Bewijs: zij  $\epsilon > 0$ . De reeks  $\sum M_k$  convergeert, dus voldoet aan het Cauchy criterium: er is een  $N$  zodat voor  $n \geq m > N$  geldt  $|\sum_{k=m}^n M_k| < \epsilon$ . Dan is

$$\left| \sum_{k=m}^n g_k(x) \right| \leq \sum_{k=m}^n |g_k(x)| \leq \sum_{k=m}^n M_k < \epsilon.$$

We zien dat  $\sum g_k$  aan het uniforme Cauchy criterium voldoet.  $\square$

## Voorbeeld

### Stelling 25.7 (Weierstrass $M$ -test)

Zij  $(M_k)$  een rij positieve getallen en  $(g_k)$  een rij functies op  $S \subseteq \mathbb{R}$  zodat  $|g_k(x)| \leq M_k$  voor alle  $x \in S$ . Als  $\sum M_k < \infty$ , dan convergeert  $\sum g_k$  uniform op  $S$ .

Bekijk de machtreeks  $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} x^k$ . Deze heeft convergentiestraal 2. Op  $[-a, a]$  geldt

$$|2^{-k} x^k| \leq 2^{-k} \cdot a^k = \left(\frac{a}{2}\right)^k$$

en voor  $a < 2$  convergeert  $\sum_k \left(\frac{a}{2}\right)^k$ . Dus kunnen we de  $M$ -test toepassen met  $M_k = \left(\frac{a}{2}\right)^k$  om te zien dat de reeks uniform convergeert op  $[-a, a]$  voor alle  $a < 2$ .

Op  $[-2, 2]$  hebben we geen uniforme convergentie, want:

### Lemma

Stel dat  $\sum g_k$  uniform convergeert op  $S$ . Dan geldt  $g_k \rightarrow 0$  uniform op  $S$ .