Analyse: van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}^n$ hoorcollege

Calculus met machtreeksen (6)

Gerrit Oomens
G.Oomens@uva.nl

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica
Universiteit van Amsterdam

Uniforme convergentie van machtreeksen

Stelling 25.7 (Weierstrass M-test)

Zij (M_k) een rij positieve getallen en (g_k) een rij functies op $S \subseteq \mathbb{R}$ zodat $|g_k(x)| \leq M_k$ voor alle $x \in S$. Als $\sum M_k < \infty$, dan convergeert $\sum g_k$ uniform op S.

Uniforme convergentie van machtreeksen

Stelling 25.7 (Weierstrass M-test)

Zij (M_k) een rij positieve getallen en (g_k) een rij functies op $S \subseteq \mathbb{R}$ zodat $|g_k(x)| \leq M_k$ voor alle $x \in S$. Als $\sum M_k < \infty$, dan convergeert $\sum g_k$ uniform op S.

We kunnen dit nu toepassen om de convergentie van een machtreeks $\sum a_k x^k$ te onderzoeken.

Uniforme convergentie van machtreeksen

Stelling 25.7 (Weierstrass M-test)

Zij (M_k) een rij positieve getallen en (g_k) een rij functies op $S \subseteq \mathbb{R}$ zodat $|g_k(x)| \leq M_k$ voor alle $x \in S$. Als $\sum M_k < \infty$, dan convergeert $\sum g_k$ uniform op S.

We kunnen dit nu toepassen om de convergentie van een machtreeks $\sum a_k x^k$ te onderzoeken. Stel dat deze reeks convergentiestraal R heeft.

Uniforme convergentie van machtreeksen

Stelling 25.7 (Weierstrass M-test)

Zij (M_k) een rij positieve getallen en (g_k) een rij functies op $S \subseteq \mathbb{R}$ zodat $|g_k(x)| \leq M_k$ voor alle $x \in S$. Als $\sum M_k < \infty$, dan convergeert $\sum g_k$ uniform op S.

We kunnen dit nu toepassen om de convergentie van een machtreeks $\sum a_k x^k$ te onderzoeken. Stel dat deze reeks convergentiestraal R heeft. Als $x \in (-R, R)$, dan is

$$|a_k x^k|$$

Uniforme convergentie van machtreeksen

Stelling 25.7 (Weierstrass M-test)

Zij (M_k) een rij positieve getallen en (g_k) een rij functies op $S \subseteq \mathbb{R}$ zodat $|g_k(x)| \leq M_k$ voor alle $x \in S$. Als $\sum M_k < \infty$, dan convergeert $\sum g_k$ uniform op S.

We kunnen dit nu toepassen om de convergentie van een machtreeks $\sum a_k x^k$ te onderzoeken. Stel dat deze reeks convergentiestraal R heeft. Als $x \in (-R, R)$, dan is

$$|a_k x^k| \leq |a_k| R^k$$

Uniforme convergentie van machtreeksen

Stelling 25.7 (Weierstrass M-test)

Zij (M_k) een rij positieve getallen en (g_k) een rij functies op $S \subseteq \mathbb{R}$ zodat $|g_k(x)| \leq M_k$ voor alle $x \in S$. Als $\sum M_k < \infty$, dan convergeert $\sum g_k$ uniform op S.

We kunnen dit nu toepassen om de convergentie van een machtreeks $\sum a_k x^k$ te onderzoeken. Stel dat deze reeks convergentiestraal R heeft. Als $x \in [-R_1, R_1]$ met $0 < R_1 < R$, dan is

$$|a_k x^k| \leq |a_k| R_1^k$$

Uniforme convergentie van machtreeksen

Stelling 25.7 (Weierstrass M-test)

Zij (M_k) een rij positieve getallen en (g_k) een rij functies op $S \subseteq \mathbb{R}$ zodat $|g_k(x)| \leq M_k$ voor alle $x \in S$. Als $\sum M_k < \infty$, dan convergeert $\sum g_k$ uniform op S.

We kunnen dit nu toepassen om de convergentie van een machtreeks $\sum a_k x^k$ te onderzoeken. Stel dat deze reeks convergentiestraal R heeft. Als $x \in [-R_1, R_1]$ met $0 < R_1 < R$, dan is

$$|a_k x^k| \leq |a_k| R_1^k$$

en $\sum |a_k| R_1^k$ convergeert.

Uniforme convergentie van machtreeksen

Stelling 25.7 (Weierstrass M-test)

Zij (M_k) een rij positieve getallen en (g_k) een rij functies op $S \subseteq \mathbb{R}$ zodat $|g_k(x)| \leq M_k$ voor alle $x \in S$. Als $\sum M_k < \infty$, dan convergeert $\sum g_k$ uniform op S.

We kunnen dit nu toepassen om de convergentie van een machtreeks $\sum a_k x^k$ te onderzoeken. Stel dat deze reeks convergentiestraal R heeft. Als $x \in [-R_1, R_1]$ met $0 < R_1 < R$, dan is

$$|a_k x^k| \leq |a_k| R_1^k$$

en $\sum |a_k| R_1^k$ convergeert.

Merk op

De convergentiestraal $\left(\limsup |a_n|^{1/n}\right)^{-1}$ van $\sum a_k x^k$ is gelijk aan die van $\sum |a_k| x^k$.

Uniforme convergentie van machtreeksen

Stelling 25.7 (Weierstrass M-test)

Zij (M_k) een rij positieve getallen en (g_k) een rij functies op $S \subseteq \mathbb{R}$ zodat $|g_k(x)| \leq M_k$ voor alle $x \in S$. Als $\sum M_k < \infty$, dan convergeert $\sum g_k$ uniform op S.

We kunnen dit nu toepassen om de convergentie van een machtreeks $\sum a_k x^k$ te onderzoeken. Stel dat deze reeks convergentiestraal R heeft. Als $x \in [-R_1, R_1]$ met $0 < R_1 < R$, dan is

$$|a_k x^k| \leq |a_k| R_1^k$$

en $\sum |a_k| R_1^k$ convergeert. Dus convergeert $\sum a_k x^k$ uniform op $[-R_1, R_1]$.

Merk op

De convergentiestraal $\left(\limsup |a_n|^{1/n}\right)^{-1}$ van $\sum a_k x^k$ is gelijk aan die van $\sum |a_k| x^k$.

Uniforme convergentie van machtreeksen

Stelling 25.7 (Weierstrass M-test)

Zij (M_k) een rij positieve getallen en (g_k) een rij functies op $S \subseteq \mathbb{R}$ zodat $|g_k(x)| \leq M_k$ voor alle $x \in S$. Als $\sum M_k < \infty$, dan convergeert $\sum g_k$ uniform op S.

We kunnen dit nu toepassen om de convergentie van een machtreeks $\sum a_k x^k$ te onderzoeken. Stel dat deze reeks convergentiestraal R heeft. Als $x \in [-R_1, R_1]$ met $0 < R_1 < R$, dan is

$$|a_k x^k| \leq |a_k| R_1^k$$

en $\sum |a_k| R_1^k$ convergeert. Dus convergeert $\sum a_k x^k$ uniform op $[-R_1, R_1]$.

Conclusie: $f(x) = \sum a_k x^k$ is een continue functie op $[-R_1, R_1]$ voor alle $R_1 < R$.

Merk op

De convergentiestraal $\left(\limsup |a_n|^{1/n}\right)^{-1}$ van $\sum a_k x^k$ is gelijk aan die van $\sum |a_k| x^k$.

Uniforme convergentie van machtreeksen

Stelling 25.7 (Weierstrass M-test)

Zij (M_k) een rij positieve getallen en (g_k) een rij functies op $S \subseteq \mathbb{R}$ zodat $|g_k(x)| \leq M_k$ voor alle $x \in S$. Als $\sum M_k < \infty$, dan convergeert $\sum g_k$ uniform op S.

We kunnen dit nu toepassen om de convergentie van een machtreeks $\sum a_k x^k$ te onderzoeken. Stel dat deze reeks convergentiestraal R heeft. Als $x \in [-R_1, R_1]$ met $0 < R_1 < R$, dan is

$$|a_k x^k| \leq |a_k| R_1^k$$

en $\sum |a_k| R_1^k$ convergeert. Dus convergeert $\sum a_k x^k$ uniform op $[-R_1, R_1]$.

Conclusie: $f(x) = \sum a_k x^k$ is een continue functie op $[-R_1, R_1]$ voor alle $R_1 < R$. De functie is dus continu op $(-R, R)$.

Merk op

De convergentiestraal $\left(\limsup |a_n|^{1/n}\right)^{-1}$ van $\sum a_k x^k$ is gelijk aan die van $\sum |a_k| x^k$.

Continuïteit en integreren

Stelling 26.1

Zij $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks met convergentiestraal R. Als $R_1 < R$, dan convergeert de reeks uniform op $[-R_1, R_1]$.

Continuïteit en integreren

Stelling 26.1

Zij $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks met convergentiestraal R. Als $R_1 < R$, dan convergeert de reeks uniform op $[-R_1, R_1]$.

We zien nu

- De functie f is continu op $[-R_1, R_1]$ voor elke $R_1 < R$.

Continuïteit en integreren

Stelling 26.1

Zij $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks met convergentiestraal R. Als $R_1 < R$, dan convergeert de reeks uniform op $[-R_1, R_1]$.

We zien nu

- De functie f is continu op $[-R_1, R_1]$ voor elke $R_1 < R$.
- Dus ook op $(-R, R)$.

Continuïteit en integreren

Stelling 26.1

Zij $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks met convergentiestraal R. Als $R_1 < R$, dan convergeert de reeks uniform op $[-R_1, R_1]$.

We zien nu

- De functie f is continu op $[-R_1, R_1]$ voor elke $R_1 < R$.
- Dus ook op $(-R, R)$.

We kunnen nu ook machtreeksen integreren:

Continuïteit en integreren

Stelling 26.1

Zij $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks met convergentiestraal R. Als $R_1 < R$, dan convergeert de reeks uniform op $[-R_1, R_1]$.

We zien nu

- De functie f is continu op $[-R_1, R_1]$ voor elke $R_1 < R$.
- Dus ook op $(-R, R)$.

We kunnen nu ook machtreeksen integreren: voor $|x| < R$ geldt

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Continuïteit en integreren

Stelling 26.1

Zij $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks met convergentiestraal R. Als $R_1 < R$, dan convergeert de reeks uniform op $[-R_1, R_1]$.

We zien nu

- De functie f is continu op $[-R_1, R_1]$ voor elke $R_1 < R$.
- Dus ook op $(-R, R)$.

We kunnen nu ook machtreeksen integreren: voor $|x| < R$ geldt

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\,\mathrm{d}t$$

Continuïteit en integreren

Stelling 26.1

Zij $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks met convergentiestraal R. Als $R_1 < R$, dan convergeert de reeks uniform op $[-R_1, R_1]$.

We zien nu

- De functie f is continu op $[-R_1, R_1]$ voor elke $R_1 < R$.
- Dus ook op $(-R, R)$.

We kunnen nu ook machtreeksen integreren: voor $|x| < R$ geldt

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\,\mathrm{d}t = \int_0^x \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n t^n\,\mathrm{d}t$$

Continuïteit en integreren

Stelling 26.1

Zij $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks met convergentiestraal R. Als $R_1 < R$, dan convergeert de reeks uniform op $[-R_1, R_1]$.

We zien nu

- De functie f is continu op $[-R_1, R_1]$ voor elke $R_1 < R$.
- Dus ook op $(-R, R)$.

We kunnen nu ook machtreeksen integreren: voor $|x| < R$ geldt

$$\begin{aligned}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\,\mathrm{d}t = \int_0^x \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n t^n\,\mathrm{d}t \\ = \lim_{N\to\infty} \int_0^x \sum_{n=0}^{N} a_n t^n\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Continuïteit en integreren

Stelling 26.1

Zij $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks met convergentiestraal R. Als $R_1 < R$, dan convergeert de reeks uniform op $[-R_1, R_1]$.

We zien nu

- De functie f is continu op $[-R_1, R_1]$ voor elke $R_1 < R$.
- Dus ook op $(-R, R)$.

We kunnen nu ook machtreeksen integreren: voor $|x| < R$ geldt

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\,\mathrm{d}t = \int_0^x \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n t^n\,\mathrm{d}t$$

$$= \lim_{N\to\infty} \int_0^x \sum_{n=0}^{N} a_n t^n\,\mathrm{d}t = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \int_0^x a_n t^n\,\mathrm{d}t$$

Continuïteit en integreren

Stelling 26.1

Zij $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks met convergentiestraal R. Als $R_1 < R$, dan convergeert de reeks uniform op $[-R_1, R_1]$.

We zien nu

- De functie f is continu op $[-R_1, R_1]$ voor elke $R_1 < R$.
- Dus ook op $(-R, R)$.

We kunnen nu ook machtreeksen integreren: voor $|x| < R$ geldt

$$\begin{aligned}
\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\,\mathrm{d}t = \int_0^x \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n t^n\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{N\to\infty} \int_0^x \sum_{n=0}^{N} a_n t^n\,\mathrm{d}t = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \int_0^x a_n t^n\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Continuïteit en integreren

Stelling 26.1

Zij $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks met convergentiestraal R. Als $R_1 < R$, dan convergeert de reeks uniform op $[-R_1, R_1]$.

We zien nu

- De functie f is continu op $[-R_1, R_1]$ voor elke $R_1 < R$.
- Dus ook op $(-R, R)$.

We kunnen nu ook machtreeksen integreren: voor $|x| < R$ geldt

$$\begin{aligned}
\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\,\mathrm{d}t = \int_0^x \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n t^n\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{N\to\infty} \int_0^x \sum_{n=0}^{N} a_n t^n\,\mathrm{d}t = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \int_0^x a_n t^n\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.
\end{aligned}$$

Differentiëren van machtreeksen

Stelling 26.5

Zij $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks met convergentiestraal $R > 0$. Dan is f differentieerbaar op $(-R, R)$ met $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.

Differentiëren van machtreeksen

Stelling 26.5

Zij $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks met convergentiestraal $R > 0$. Dan is f differentieerbaar op $(-R, R)$ met $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.

Bewijs:

Differentiëren van machtreeksen

Stelling 26.5

Zij $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks met convergentiestraal $R > 0$. Dan is f differentieerbaar op $(-R, R)$ met $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.

Bewijs: merk op dat de reeks

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

Differentiëren van machtreeksen

Stelling 26.5

Zij $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks met convergentiestraal $R > 0$. Dan is f differentieerbaar op $(-R, R)$ met $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.

Bewijs: merk op dat de reeks

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

ook convergentiestraal R heeft

Differentiëren van machtreeksen

Stelling 26.5

Zij $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks met convergentiestraal $R > 0$. Dan is f differentieerbaar op $(-R, R)$ met $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.

Bewijs: merk op dat de reeks

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n$$

ook convergentiestraal R heeft

Differentiëren van machtreeksen

Stelling 26.5

Zij $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks met convergentiestraal $R > 0$. Dan is f differentieerbaar op $(-R, R)$ met $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.

Bewijs: merk op dat de reeks

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n$$

ook convergentiestraal R heeft: $\overline{\lim} \, |n a_n|^{1/n}$

Differentiëren van machtreeksen

Stelling 26.5

Zij $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks met convergentiestraal $R > 0$. Dan is f differentieerbaar op $(-R, R)$ met $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.

Bewijs: merk op dat de reeks

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n$$

ook convergentiestraal R heeft: $\overline{\lim}\, |n a_n|^{1/n} = \lim n^{1/n}\, \overline{\lim}\, |a_n|^{1/n}$

Differentiëren van machtreeksen

Stelling 26.5

Zij $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks met convergentiestraal $R > 0$. Dan is f differentieerbaar op $(-R, R)$ met $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.

Bewijs: merk op dat de reeks

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n$$

ook convergentiestraal R heeft: $\overline{\lim}\, |n a_n|^{1/n} = \lim n^{1/n}\, \overline{\lim}\, |a_n|^{1/n} = \overline{\lim}\, |a_n|^{1/n}$.

Differentiëren van machtreeksen

Stelling 26.5

Zij $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks met convergentiestraal $R > 0$. Dan is f differentieerbaar op $(-R, R)$ met $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.

Bewijs: merk op dat de reeks

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n$$

ook convergentiestraal R heeft: $\overline{\lim}\, |n a_n|^{1/n} = \lim n^{1/n}\, \overline{\lim}\, |a_n|^{1/n} = \overline{\lim}\, |a_n|^{1/n}$.
Volgens de vorige stelling geldt voor $|x| < R$ dat

$$\int_0^x g(t)\, \mathrm{d}t$$

Differentiëren van machtreeksen

Stelling 26.5

Zij $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks met convergentiestraal $R > 0$. Dan is f differentieerbaar op $(-R, R)$ met $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.

Bewijs: merk op dat de reeks

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n$$

ook convergentiestraal R heeft: $\overline{\lim}\, |n a_n|^{1/n} = \lim n^{1/n}\, \overline{\lim}\, |a_n|^{1/n} = \overline{\lim}\, |a_n|^{1/n}$.
Volgens de vorige stelling geldt voor $|x| < R$ dat

$$\int_0^x g(t)\, \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x n a_n t^{n-1}\, \mathrm{d}t$$

Differentiëren van machtreeksen

Stelling 26.5

Zij $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks met convergentiestraal $R > 0$. Dan is f differentieerbaar op $(-R, R)$ met $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.

Bewijs: merk op dat de reeks

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n$$

ook convergentiestraal R heeft: $\overline{\lim}\, |n a_n|^{1/n} = \lim n^{1/n}\, \overline{\lim}\, |a_n|^{1/n} = \overline{\lim}\, |a_n|^{1/n}$.
Volgens de vorige stelling geldt voor $|x| < R$ dat

$$\int_0^x g(t)\, \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x n a_n t^{n-1}\, \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

Differentiëren van machtreeksen

Stelling 26.5

Zij $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks met convergentiestraal $R > 0$. Dan is f differentieerbaar op $(-R, R)$ met $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.

Bewijs: merk op dat de reeks

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n$$

ook convergentiestraal R heeft: $\overline{\lim}\, |n a_n|^{1/n} = \lim n^{1/n}\, \overline{\lim}\, |a_n|^{1/n} = \overline{\lim}\, |a_n|^{1/n}$. Volgens de vorige stelling geldt voor $|x| < R$ dat

$$\int_0^x g(t)\, \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x n a_n t^{n-1}\, \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = f(x) - a_0.$$

Differentiëren van machtreeksen

Stelling 26.5

Zij $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks met convergentiestraal $R > 0$. Dan is f differentieerbaar op $(-R, R)$ met $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.

Bewijs: merk op dat de reeks

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n$$

ook convergentiestraal R heeft: $\overline{\lim}\, |n a_n|^{1/n} = \lim n^{1/n}\, \overline{\lim}\, |a_n|^{1/n} = \overline{\lim}\, |a_n|^{1/n}$.
Volgens de vorige stelling geldt voor $|x| < R$ dat

$$\int_0^x g(t)\, \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x n a_n t^{n-1}\, \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = f(x) - a_0.$$

Dus is $f(x) = \int_0^x g(t)\, \mathrm{d}t + a_0$

Differentiëren van machtreeksen

Stelling 26.5

Zij $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks met convergentiestraal $R > 0$. Dan is f differentieerbaar op $(-R, R)$ met $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.

Bewijs: merk op dat de reeks

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n$$

ook convergentiestraal R heeft: $\overline{\lim}\, |n a_n|^{1/n} = \lim n^{1/n}\, \overline{\lim}\, |a_n|^{1/n} = \overline{\lim}\, |a_n|^{1/n}$.
Volgens de vorige stelling geldt voor $|x| < R$ dat

$$\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x n a_n t^{n-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = f(x) - a_0.$$

Dus is $f(x) = \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t + a_0$ differentieerbaar volgens de Hoofdstelling van de Calculus

Differentiëren van machtreeksen

Stelling 26.5

Zij $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks met convergentiestraal $R > 0$. Dan is f differentieerbaar op $(-R, R)$ met $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.

Bewijs: merk op dat de reeks

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n$$

ook convergentiestraal R heeft: $\overline{\lim}\, |n a_n|^{1/n} = \lim n^{1/n}\, \overline{\lim}\, |a_n|^{1/n} = \overline{\lim}\, |a_n|^{1/n}$.
Volgens de vorige stelling geldt voor $|x| < R$ dat

$$\int_0^x g(t)\, \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x n a_n t^{n-1}\, \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = f(x) - a_0.$$

Dus is $f(x) = \int_0^x g(t)\, \mathrm{d}t + a_0$ differentieerbaar volgens de Hoofdstelling van de Calculus en geldt $f'(x) = g(x)$.

Voorbeeld: rekenen met machtreeksen

Bekijk $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

Voorbeeld: rekenen met machtreeksen

Bekijk $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ voor $x \in (-1, 1)$.

Voorbeeld: rekenen met machtreeksen

Bekijk $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ voor $x \in (-1, 1)$. Differentiëren geeft

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

Voorbeeld: rekenen met machtreeksen

Bekijk $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ voor $x \in (-1, 1)$. Differentiëren geeft

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Voorbeeld: rekenen met machtreeksen

Bekijk $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ voor $x \in (-1, 1)$. Differentiëren geeft

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

en integreren geeft

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Voorbeeld: rekenen met machtreeksen

Bekijk $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ voor $x \in (-1, 1)$. Differentiëren geeft

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

en integreren geeft

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}$$

Voorbeeld: rekenen met machtreeksen

Bekijk $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ voor $x \in (-1, 1)$. Differentiëren geeft

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

en integreren geeft

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = -\log(1-x).$$

Voorbeeld: rekenen met machtreeksen

Bekijk $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ voor $x \in (-1, 1)$. Differentiëren geeft

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

en integreren geeft

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = -\log(1-x).$$

We zien dus

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$$

Voorbeeld: rekenen met machtreeksen

Bekijk $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ voor $x \in (-1, 1)$. Differentiëren geeft

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

en integreren geeft

$$\int_0^x f(t)\, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = -\log(1-x).$$

We zien dus

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2},$$

Voorbeeld: rekenen met machtreeksen

Bekijk $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ voor $x \in (-1,1)$. Differentiëren geeft

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

en integreren geeft

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = -\log(1-x).$$

We zien dus

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$$

Voorbeeld: rekenen met machtreeksen

Bekijk $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ voor $x \in (-1, 1)$. Differentiëren geeft

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

en integreren geeft

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = -\log(1-x).$$

We zien dus

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = -\log(1-x).$$

Voorbeeld: rekenen met machtreeksen

Bekijk $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ voor $x \in (-1, 1)$. Differentiëren geeft

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

en integreren geeft

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = -\log(1-x).$$

We zien dus

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = -\log(1-x).$$

Als we in de laatste gelijkheid x door $-x$ vervangen

Voorbeeld: rekenen met machtreeksen

Bekijk $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ voor $x \in (-1, 1)$. Differentiëren geeft

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

en integreren geeft

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = -\log(1-x).$$

We zien dus

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = -\log(1-x).$$

Als we in de laatste gelijkheid x door $-x$ vervangen, zien we dat

$$-\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$$

voor $x \in (-1, 1)$.

Voorbeeld: rekenen met machtreeksen

Bekijk $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ voor $x \in (-1,1)$. Differentiëren geeft

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

en integreren geeft

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = -\log(1-x).$$

We zien dus

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = -\log(1-x).$$

Als we in de laatste gelijkheid x door $-x$ vervangen, zien we dat

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

voor $x \in (-1,1)$.

Voorbeeld: rekenen met machtreeksen

Bekijk $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ voor $x \in (-1, 1)$. Differentiëren geeft

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

en integreren geeft

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = -\log(1-x).$$

We zien dus

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = -\log(1-x).$$

Als we in de laatste gelijkheid x door $-x$ vervangen, zien we dat

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

voor $x \in (-1, 1)$.

Voorbeeld: rekenen met machtreeksen

Bekijk $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ voor $x \in (-1, 1)$. Differentiëren geeft

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

en integreren geeft

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = -\log(1-x).$$

We zien dus

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = -\log(1-x).$$

Als we in de laatste gelijkheid x door $-x$ vervangen, zien we dat

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

voor $x \in (-1, 1)$. Deze gelijkheid blijkt ook te gelden voor $x = 1$:

Voorbeeld: rekenen met machtreeksen

Bekijk $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ voor $x \in (-1, 1)$. Differentiëren geeft

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

en integreren geeft

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = -\log(1-x).$$

We zien dus

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = -\log(1-x).$$

Als we in de laatste gelijkheid x door $-x$ vervangen, zien we dat

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

voor $x \in (-1, 1)$. Deze gelijkheid blijkt ook te gelden voor $x = 1$: we hebben

$$\log 2 = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \cdots .$$

Stelling van Abel

Stelling van Abel (26.6)

Stel dat $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks is met convergentiestraal R. Als de reeks convergeert in $x = R$, dan is f continu op $(-R, R]$. Zelfde voor $x = -R$.

Stelling van Abel

Stelling van Abel (26.6)

Stel dat $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks is met convergentiestraal R. Als de reeks convergeert in $x = R$, dan is f continu op $(-R, R]$. Zelfde voor $x = -R$.

We passen dit toe op de reeks

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n.$$

Stelling van Abel

Stelling van Abel (26.6)

Stel dat $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks is met convergentiestraal R. Als de reeks convergeert in $x = R$, dan is f continu op $(-R, R]$. Zelfde voor $x = -R$.

We passen dit toe op de reeks

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n.$$

In $x = 1$ is dit een alternerende reeks, dus convergent.

Stelling van Abel

Stelling van Abel (26.6)

Stel dat $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks is met convergentiestraal R. Als de reeks convergeert in $x = R$, dan is f continu op $(-R, R]$. Zelfde voor $x = -R$.

We passen dit toe op de reeks

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n.$$

In $x = 1$ is dit een alternerende reeks, dus convergent. Vanwege de stelling is f dus continu op $(-1, 1]$.

Stelling van Abel

Stelling van Abel (26.6)

Stel dat $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks is met convergentiestraal R. Als de reeks convergeert in $x = R$, dan is f continu op $(-R, R]$. Zelfde voor $x = -R$.

We passen dit toe op de reeks

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n.$$

In $x = 1$ is dit een alternerende reeks, dus convergent. Vanwege de stelling is f dus continu op $(-1, 1]$. We zagen dat voor $x \in (-1, 1)$ geldt $f(x) = \log(1 + x)$.

Stelling van Abel

Stelling van Abel (26.6)

Stel dat $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks is met convergentiestraal R. Als de reeks convergeert in $x = R$, dan is f continu op $(-R, R]$. Zelfde voor $x = -R$.

We passen dit toe op de reeks

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n.$$

In $x = 1$ is dit een alternerende reeks, dus convergent. Vanwege de stelling is f dus continu op $(-1, 1]$. We zagen dat voor $x \in (-1, 1)$ geldt $f(x) = \log(1 + x)$. Dan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Stelling van Abel

Stelling van Abel (26.6)

Stel dat $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks is met convergentiestraal R. Als de reeks convergeert in $x = R$, dan is f continu op $(-R, R]$. Zelfde voor $x = -R$.

We passen dit toe op de reeks

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n.$$

In $x = 1$ is dit een alternerende reeks, dus convergent. Vanwege de stelling is f dus continu op $(-1, 1]$. We zagen dat voor $x \in (-1, 1)$ geldt $f(x) = \log(1 + x)$. Dan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \lim_{x \uparrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

Stelling van Abel

Stelling van Abel (26.6)

Stel dat $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks is met convergentiestraal R. Als de reeks convergeert in $x = R$, dan is f continu op $(-R, R]$. Zelfde voor $x = -R$.

We passen dit toe op de reeks

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n.$$

In $x = 1$ is dit een alternerende reeks, dus convergent. Vanwege de stelling is f dus continu op $(-1, 1]$. We zagen dat voor $x \in (-1, 1)$ geldt $f(x) = \log(1 + x)$. Dan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \lim_{x \uparrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \lim_{x \uparrow 1} \log(1 + x)$$

Stelling van Abel

Stelling van Abel (26.6)

Stel dat $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks is met convergentiestraal R. Als de reeks convergeert in $x = R$, dan is f continu op $(-R, R]$. Zelfde voor $x = -R$.

We passen dit toe op de reeks

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n.$$

In $x = 1$ is dit een alternerende reeks, dus convergent. Vanwege de stelling is f dus continu op $(-1, 1]$. We zagen dat voor $x \in (-1, 1)$ geldt $f(x) = \log(1 + x)$. Dan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \lim_{x \uparrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \lim_{x \uparrow 1} \log(1 + x) = \log 2.$$

Stelling van Abel

Stelling van Abel (26.6)

Stel dat $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks is met convergentiestraal R. Als de reeks convergeert in $x = R$, dan is f continu op $(-R, R]$. Zelfde voor $x = -R$.

We passen dit toe op de reeks

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n.$$

In $x = 1$ is dit een alternerende reeks, dus convergent. Vanwege de stelling is f dus continu op $(-1, 1]$. We zagen dat voor $x \in (-1, 1)$ geldt $f(x) = \log(1 + x)$. Dan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \lim_{x \uparrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \lim_{x \uparrow 1} \log(1 + x) = \log 2.$$

Dus we zien inderdaad dat $\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$.

Partieel sommeren

Lemma

Zij (a_n) en (b_n) rijen. Definieer $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \cdots + a_n$. Dan geldt

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = s_n b_n - s_{m-1} b_m + \sum_{k=m}^{n-1} s_k (b_k - b_{k+1}).$$

Partieel sommeren

Lemma

Zij (a_n) en (b_n) rijen. Definieer $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \cdots + a_n$. Dan geldt

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = s_n b_n - s_{m-1} b_m + \sum_{k=m}^{n-1} s_k (b_k - b_{k+1}).$$

Bewijs:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k$$

Partieel sommeren

Lemma

Zij (a_n) en (b_n) rijen. Definieer $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \cdots + a_n$. Dan geldt

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = s_n b_n - s_{m-1} b_m + \sum_{k=m}^{n-1} s_k (b_k - b_{k+1}).$$

Bewijs:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m}^{n} (s_k - s_{k-1}) b_k$$

Partieel sommeren

Lemma

Zij (a_n) en (b_n) rijen. Definieer $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \cdots + a_n$. Dan geldt

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = s_n b_n - s_{m-1} b_m + \sum_{k=m}^{n-1} s_k (b_k - b_{k+1}).$$

Bewijs:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m}^{n} (s_k - s_{k-1}) b_k = \sum_{k=m}^{n} s_k b_k - \sum_{k=m}^{n} s_{k-1} b_k$$

Partieel sommeren

Lemma

Zij (a_n) en (b_n) rijen. Definieer $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \cdots + a_n$. Dan geldt

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = s_n b_n - s_{m-1} b_m + \sum_{k=m}^{n-1} s_k (b_k - b_{k+1}).$$

Bewijs:

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n} a_k b_k &= \sum_{k=m}^{n} (s_k - s_{k-1}) b_k = \sum_{k=m}^{n} s_k b_k - \sum_{k=m}^{n} s_{k-1} b_k \\ &= \sum_{k=m}^{n} s_k b_k - \sum_{k=m-1}^{n-1} s_k b_{k+1}\end{aligned}$$

Partieel sommeren

Lemma

Zij (a_n) en (b_n) rijen. Definieer $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \cdots + a_n$. Dan geldt

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = s_n b_n - s_{m-1} b_m + \sum_{k=m}^{n-1} s_k (b_k - b_{k+1}).$$

Bewijs:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m}^{n} a_k b_k &= \sum_{k=m}^{n} (s_k - s_{k-1}) b_k = \sum_{k=m}^{n} s_k b_k - \sum_{k=m}^{n} s_{k-1} b_k \\
&= \sum_{k=m}^{n} s_k b_k - \sum_{k=m-1}^{n-1} s_k b_{k+1} \\
&= s_n b_n + \sum_{k=m}^{n-1} s_k b_k - \sum_{k=m-1}^{n-1} s_k b_{k+1}.
\end{aligned}$$

Partieel sommeren

Lemma

Zij (a_n) en (b_n) rijen. Definieer $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \cdots + a_n$. Dan geldt

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = s_n b_n - s_{m-1} b_m + \sum_{k=m}^{n-1} s_k (b_k - b_{k+1}).$$

Bewijs:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m}^{n} a_k b_k &= \sum_{k=m}^{n} (s_k - s_{k-1}) b_k = \sum_{k=m}^{n} s_k b_k - \sum_{k=m}^{n} s_{k-1} b_k \\
&= \sum_{k=m}^{n} s_k b_k - \sum_{k=m-1}^{n-1} s_k b_{k+1} \\
&= s_n b_n + \sum_{k=m}^{n-1} s_k b_k - s_{m-1} b_m - \sum_{k=m}^{n-1} s_k b_{k+1}.
\end{aligned}$$

Stelling van Abel

Stelling van Abel (26.6)

Stel dat $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks is met convergentiestraal R. Als de reeks convergeert in $x = R$, dan is f continu op $(-R, R]$. Zelfde voor $x = -R$.

Stelling van Abel

Stelling van Abel (26.6)

Stel dat $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks is met convergentiestraal R. Als de reeks convergeert in $x = R$, dan is f continu op $(-R, R]$. Zelfde voor $x = -R$.

Stelling van Abel, basisgeval

Stel dat $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks is met convergentiestraal 1. Als de reeks convergeert in $x = 1$ met $f(1) = 0$, dan is f continu op $(-1, 1]$.

Stelling van Abel

Stelling van Abel, basisgeval

Stel dat $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks is met convergentiestraal 1. Als de reeks convergeert in $x = 1$ met $f(1) = 0$, dan is f continu op $(-1, 1]$.

Stelling van Abel

Stelling van Abel, basisgeval

Stel dat $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks is met convergentiestraal 1. Als de reeks convergeert in $x = 1$ met $f(1) = 0$, dan is f continu op $(-1, 1]$.

Definieer $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$

Stelling van Abel

Stelling van Abel, basisgeval

Stel dat $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks is met convergentiestraal 1. Als de reeks convergeert in $x = 1$ met $f(1) = 0$, dan is f continu op $(-1, 1]$.

Definieer $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ en $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$

Stelling van Abel

Stelling van Abel, basisgeval

Stel dat $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks is met convergentiestraal 1. Als de reeks convergeert in $x = 1$ met $f(1) = 0$, dan is f continu op $(-1, 1]$.

Definieer $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ en $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = f_n(1)$.

Stelling van Abel

Stelling van Abel, basisgeval

Stel dat $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks is met convergentiestraal 1. Als de reeks convergeert in $x = 1$ met $f(1) = 0$, dan is f continu op $(-1, 1]$.

Definieer $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ en $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = f_n(1)$. Bekijk voor $n > m$

$$f_n(x) - f_m(x)$$

Stelling van Abel

Stelling van Abel, basisgeval

Stel dat $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks is met convergentiestraal 1. Als de reeks convergeert in $x = 1$ met $f(1) = 0$, dan is f continu op $(-1, 1]$.

Definieer $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ en $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = f_n(1)$. Bekijk voor $n > m$

$$f_n(x) - f_m(x) = \sum_{k=m+1}^{n} a_k x^k$$

Stelling van Abel

Stelling van Abel, basisgeval

Stel dat $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks is met convergentiestraal 1. Als de reeks convergeert in $x = 1$ met $f(1) = 0$, dan is f continu op $(-1, 1]$.

Definieer $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ en $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = f_n(1)$. Bekijk voor $n > m$

$$f_n(x) - f_m(x) = \sum_{k=m+1}^{n} a_k x^k$$

Partieel sommeren

Zij (a_n) en (b_n) rijen. Definieer $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \cdots + a_n$. Dan geldt

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = s_n b_n - s_{m-1} b_m + \sum_{k=m}^{n-1} s_k (b_k - b_{k+1}).$$

Stelling van Abel

Stelling van Abel, basisgeval

Stel dat $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks is met convergentiestraal 1. Als de reeks convergeert in $x = 1$ met $f(1) = 0$, dan is f continu op $(-1, 1]$.

Definieer $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ en $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = f_n(1)$. Bekijk voor $n > m$

$$f_n(x) - f_m(x) = \sum_{k=m+1}^{n} a_k x^k = s_n x^n - s_m x^{m+1} + \sum_{k=m+1}^{n-1} s_k (x^k - x^{k+1}).$$

Partieel sommeren

Zij (a_n) en (b_n) rijen. Definieer $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \cdots + a_n$. Dan geldt

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = s_n b_n - s_{m-1} b_m + \sum_{k=m}^{n-1} s_k (b_k - b_{k+1}).$$

Stelling van Abel

Stelling van Abel, basisgeval

Stel dat $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks is met convergentiestraal 1. Als de reeks convergeert in $x = 1$ met $f(1) = 0$, dan is f continu op $(-1, 1]$.

Definieer $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ en $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = f_n(1)$. Bekijk voor $n > m$

$$f_n(x) - f_m(x) = \sum_{k=m+1}^{n} a_k x^k = s_n x^n - s_m x^{m+1} + \sum_{k=m+1}^{n-1} s_k (x^k - x^{k+1}).$$

Er geldt $s_k \to 0$,

Partieel sommeren

Zij (a_n) en (b_n) rijen. Definieer $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \cdots + a_n$. Dan geldt

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = s_n b_n - s_{m-1} b_m + \sum_{k=m}^{n-1} s_k (b_k - b_{k+1}).$$

Stelling van Abel

Stelling van Abel, basisgeval

Stel dat $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks is met convergentiestraal 1. Als de reeks convergeert in $x = 1$ met $f(1) = 0$, dan is f continu op $(-1, 1]$.

Definieer $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ en $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = f_n(1)$. Bekijk voor $n > m$

$$f_n(x) - f_m(x) = \sum_{k=m+1}^{n} a_k x^k = s_n x^n - s_m x^{m+1} + \sum_{k=m+1}^{n-1} s_k (x^k - x^{k+1}).$$

Er geldt $s_k \to 0$, dus er is N zodat $|s_k| < \frac{\epsilon}{3}$ voor $k > N$.

Partieel sommeren

Zij (a_n) en (b_n) rijen. Definieer $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \cdots + a_n$. Dan geldt

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = s_n b_n - s_{m-1} b_m + \sum_{k=m}^{n-1} s_k (b_k - b_{k+1}).$$

Stelling van Abel

Stelling van Abel, basisgeval

Stel dat $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks is met convergentiestraal 1. Als de reeks convergeert in $x = 1$ met $f(1) = 0$, dan is f continu op $(-1, 1]$.

Definieer $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ en $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = f_n(1)$. Bekijk voor $n > m$

$$f_n(x) - f_m(x) = \sum_{k=m+1}^{n} a_k x^k = s_n x^n - s_m x^{m+1} + \sum_{k=m+1}^{n-1} s_k (x^k - x^{k+1}).$$

Er geldt $s_k \to 0$, dus er is N zodat $|s_k| < \frac{\epsilon}{3}$ voor $k > N$.

Stelling van Abel

Stelling van Abel, basisgeval

Stel dat $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks is met convergentiestraal 1. Als de reeks convergeert in $x = 1$ met $f(1) = 0$, dan is f continu op $(-1, 1]$.

Definieer $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ en $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = f_n(1)$. Bekijk voor $n > m$

$$f_n(x) - f_m(x) = \sum_{k=m+1}^{n} a_k x^k = s_n x^n - s_m x^{m+1} + \sum_{k=m+1}^{n-1} s_k (x^k - x^{k+1}).$$

Er geldt $s_k \to 0$, dus er is N zodat $|s_k| < \frac{\epsilon}{3}$ voor $k > N$. Dan geldt voor $x \in [0, 1)$

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n-1} s_k (x^k - x^{k+1}) \right|$$

Stelling van Abel

Stelling van Abel, basisgeval

Stel dat $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks is met convergentiestraal 1. Als de reeks convergeert in $x = 1$ met $f(1) = 0$, dan is f continu op $(-1, 1]$.

Definieer $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ en $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = f_n(1)$. Bekijk voor $n > m$

$$f_n(x) - f_m(x) = \sum_{k=m+1}^{n} a_k x^k = s_n x^n - s_m x^{m+1} + \sum_{k=m+1}^{n-1} s_k (x^k - x^{k+1}).$$

Er geldt $s_k \to 0$, dus er is N zodat $|s_k| < \frac{\epsilon}{3}$ voor $k > N$. Dan geldt voor $x \in [0, 1)$

$$\left| (1 - x) \sum_{k=m+1}^{n-1} s_k x^k \right|$$

Stelling van Abel

Stelling van Abel, basisgeval

Stel dat $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks is met convergentiestraal 1. Als de reeks convergeert in $x = 1$ met $f(1) = 0$, dan is f continu op $(-1, 1]$.

Definieer $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ en $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = f_n(1)$. Bekijk voor $n > m$

$$f_n(x) - f_m(x) = \sum_{k=m+1}^{n} a_k x^k = s_n x^n - s_m x^{m+1} + \sum_{k=m+1}^{n-1} s_k (x^k - x^{k+1}).$$

Er geldt $s_k \to 0$, dus er is N zodat $|s_k| < \frac{\epsilon}{3}$ voor $k > N$. Dan geldt voor $x \in [0, 1)$

$$\left| (1 - x) \sum_{k=m+1}^{n-1} s_k x^k \right| \leq \frac{\epsilon}{3} (1 - x) \sum_{k=m+1}^{n-1} x^k$$

Stelling van Abel

Stelling van Abel, basisgeval

Stel dat $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks is met convergentiestraal 1. Als de reeks convergeert in $x = 1$ met $f(1) = 0$, dan is f continu op $(-1, 1]$.

Definieer $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ en $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = f_n(1)$. Bekijk voor $n > m$

$$f_n(x) - f_m(x) = \sum_{k=m+1}^{n} a_k x^k = s_n x^n - s_m x^{m+1} + \sum_{k=m+1}^{n-1} s_k (x^k - x^{k+1}).$$

Er geldt $s_k \to 0$, dus er is N zodat $|s_k| < \frac{\epsilon}{3}$ voor $k > N$. Dan geldt voor $x \in [0, 1)$

$$\left| (1-x) \sum_{k=m+1}^{n-1} s_k x^k \right| \leq \frac{\epsilon}{3}(1-x) \sum_{k=m+1}^{n-1} x^k = \frac{\epsilon}{3}(1-x) \frac{x^{m+1} - x^n}{1-x}$$

Stelling van Abel

Stelling van Abel, basisgeval

Stel dat $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks is met convergentiestraal 1. Als de reeks convergeert in $x = 1$ met $f(1) = 0$, dan is f continu op $(-1, 1]$.

Definieer $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ en $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = f_n(1)$. Bekijk voor $n > m$

$$f_n(x) - f_m(x) = \sum_{k=m+1}^{n} a_k x^k = s_n x^n - s_m x^{m+1} + \sum_{k=m+1}^{n-1} s_k (x^k - x^{k+1}).$$

Er geldt $s_k \to 0$, dus er is N zodat $|s_k| < \frac{\epsilon}{3}$ voor $k > N$. Dan geldt voor $x \in [0, 1)$

$$\left| (1-x) \sum_{k=m+1}^{n-1} s_k x^k \right| \leq \frac{\epsilon}{3}(1-x) \sum_{k=m+1}^{n-1} x^k = \frac{\epsilon}{3}(1-x)\frac{x^{m+1} - x^n}{1-x} < \frac{\epsilon}{3}.$$

Stelling van Abel

Stelling van Abel, basisgeval

Stel dat $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks is met convergentiestraal 1. Als de reeks convergeert in $x = 1$ met $f(1) = 0$, dan is f continu op $(-1, 1]$.

Definieer $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ en $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = f_n(1)$. Bekijk voor $n > m$

$$f_n(x) - f_m(x) = \sum_{k=m+1}^{n} a_k x^k = s_n x^n - s_m x^{m+1} + \sum_{k=m+1}^{n-1} s_k(x^k - x^{k+1}).$$

Er geldt $s_k \to 0$, dus er is N zodat $|s_k| < \frac{\epsilon}{3}$ voor $k > N$. Dan geldt voor $x \in [0, 1)$

$$\left|(1-x)\sum_{k=m+1}^{n-1} s_k x^k\right| \leq \frac{\epsilon}{3}(1-x)\sum_{k=m+1}^{n-1} x^k = \frac{\epsilon}{3}(1-x)\frac{x^{m+1} - x^n}{1-x} < \frac{\epsilon}{3}.$$

Dus geldt voor $x \in [0, 1]$ dat

$$|f_n(x) - f_m(x)|$$

Stelling van Abel

Stelling van Abel, basisgeval

Stel dat $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks is met convergentiestraal 1. Als de reeks convergeert in $x = 1$ met $f(1) = 0$, dan is f continu op $(-1, 1]$.

Definieer $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ en $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = f_n(1)$. Bekijk voor $n > m$

$$f_n(x) - f_m(x) = \sum_{k=m+1}^{n} a_k x^k = s_n x^n - s_m x^{m+1} + \sum_{k=m+1}^{n-1} s_k (x^k - x^{k+1}).$$

Er geldt $s_k \to 0$, dus er is N zodat $|s_k| < \frac{\epsilon}{3}$ voor $k > N$. Dan geldt voor $x \in [0, 1)$

$$\left| (1 - x) \sum_{k=m+1}^{n-1} s_k x^k \right| \leq \frac{\epsilon}{3} (1 - x) \sum_{k=m+1}^{n-1} x^k = \frac{\epsilon}{3} (1 - x) \frac{x^{m+1} - x^n}{1 - x} < \frac{\epsilon}{3}.$$

Dus geldt voor $x \in [0, 1]$ dat

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |s_n| + |s_m| + \tfrac{\epsilon}{3}$$

Stelling van Abel

Stelling van Abel, basisgeval

Stel dat $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks is met convergentiestraal 1. Als de reeks convergeert in $x = 1$ met $f(1) = 0$, dan is f continu op $(-1, 1]$.

Definieer $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ en $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = f_n(1)$. Bekijk voor $n > m$

$$f_n(x) - f_m(x) = \sum_{k=m+1}^{n} a_k x^k = s_n x^n - s_m x^{m+1} + \sum_{k=m+1}^{n-1} s_k (x^k - x^{k+1}).$$

Er geldt $s_k \to 0$, dus er is N zodat $|s_k| < \frac{\epsilon}{3}$ voor $k > N$. Dan geldt voor $x \in [0, 1)$

$$\left| (1-x) \sum_{k=m+1}^{n-1} s_k x^k \right| \leq \frac{\epsilon}{3}(1-x) \sum_{k=m+1}^{n-1} x^k = \frac{\epsilon}{3}(1-x) \frac{x^{m+1} - x^n}{1-x} < \frac{\epsilon}{3}.$$

Dus geldt voor $x \in [0, 1]$ dat

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |s_n| + |s_m| + \tfrac{\epsilon}{3} < \epsilon.$$

Stelling van Abel

Stelling van Abel, basisgeval

Stel dat $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks is met convergentiestraal 1. Als de reeks convergeert in $x = 1$ met $f(1) = 0$, dan is f continu op $(-1, 1]$.

Definieer $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ en $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = f_n(1)$. Bekijk voor $n > m$

$$f_n(x) - f_m(x) = \sum_{k=m+1}^{n} a_k x^k = s_n x^n - s_m x^{m+1} + \sum_{k=m+1}^{n-1} s_k (x^k - x^{k+1}).$$

Er geldt $s_k \to 0$, dus er is N zodat $|s_k| < \frac{\epsilon}{3}$ voor $k > N$. Dan geldt voor $x \in [0, 1)$

$$\left|(1-x) \sum_{k=m+1}^{n-1} s_k x^k\right| \leq \frac{\epsilon}{3}(1-x) \sum_{k=m+1}^{n-1} x^k = \frac{\epsilon}{3}(1-x)\frac{x^{m+1} - x^n}{1-x} < \frac{\epsilon}{3}.$$

Dus geldt voor $x \in [0, 1]$ dat

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |s_n| + |s_m| + \tfrac{\epsilon}{3} < \epsilon.$$

We zien dat (f_n) uniform Cauchy is op $[0, 1]$

Stelling van Abel

Stelling van Abel, basisgeval

Stel dat $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks is met convergentiestraal 1. Als de reeks convergeert in $x = 1$ met $f(1) = 0$, dan is f continu op $(-1, 1]$.

Definieer $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ en $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = f_n(1)$. Bekijk voor $n > m$

$$f_n(x) - f_m(x) = \sum_{k=m+1}^{n} a_k x^k = s_n x^n - s_m x^{m+1} + \sum_{k=m+1}^{n-1} s_k (x^k - x^{k+1}).$$

Er geldt $s_k \to 0$, dus er is N zodat $|s_k| < \frac{\epsilon}{3}$ voor $k > N$. Dan geldt voor $x \in [0, 1)$

$$\left|(1-x) \sum_{k=m+1}^{n-1} s_k x^k\right| \leq \frac{\epsilon}{3}(1-x) \sum_{k=m+1}^{n-1} x^k = \frac{\epsilon}{3}(1-x)\frac{x^{m+1} - x^n}{1-x} < \frac{\epsilon}{3}.$$

Dus geldt voor $x \in [0, 1]$ dat

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |s_n| + |s_m| + \tfrac{\epsilon}{3} < \epsilon.$$

We zien dat (f_n) uniform Cauchy is op $[0, 1]$, dus uniform convergent.

Stelling van Abel

Stelling van Abel, basisgeval

Stel dat $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks is met convergentiestraal 1. Als de reeks convergeert in $x = 1$ met $f(1) = 0$, dan is f continu op $(-1, 1]$.

Definieer $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ en $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = f_n(1)$. Bekijk voor $n > m$

$$f_n(x) - f_m(x) = \sum_{k=m+1}^{n} a_k x^k = s_n x^n - s_m x^{m+1} + \sum_{k=m+1}^{n-1} s_k (x^k - x^{k+1}).$$

Er geldt $s_k \to 0$, dus er is N zodat $|s_k| < \frac{\epsilon}{3}$ voor $k > N$. Dan geldt voor $x \in [0, 1)$

$$\left|(1-x) \sum_{k=m+1}^{n-1} s_k x^k\right| \leq \frac{\epsilon}{3}(1-x) \sum_{k=m+1}^{n-1} x^k = \frac{\epsilon}{3}(1-x)\frac{x^{m+1} - x^n}{1-x} < \frac{\epsilon}{3}.$$

Dus geldt voor $x \in [0, 1]$ dat

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |s_n| + |s_m| + \tfrac{\epsilon}{3} < \epsilon.$$

We zien dat (f_n) uniform Cauchy is op $[0, 1]$, dus uniform convergent. Voor elke n is f_n continu op $[0, 1]$

Stelling van Abel

Stelling van Abel, basisgeval

Stel dat $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks is met convergentiestraal 1. Als de reeks convergeert in $x = 1$ met $f(1) = 0$, dan is f continu op $(-1, 1]$.

Definieer $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ en $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = f_n(1)$. Bekijk voor $n > m$

$$f_n(x) - f_m(x) = \sum_{k=m+1}^{n} a_k x^k = s_n x^n - s_m x^{m+1} + \sum_{k=m+1}^{n-1} s_k (x^k - x^{k+1}).$$

Er geldt $s_k \to 0$, dus er is N zodat $|s_k| < \frac{\epsilon}{3}$ voor $k > N$. Dan geldt voor $x \in [0, 1)$

$$\left| (1-x) \sum_{k=m+1}^{n-1} s_k x^k \right| \leq \frac{\epsilon}{3}(1-x) \sum_{k=m+1}^{n-1} x^k = \frac{\epsilon}{3}(1-x)\frac{x^{m+1} - x^n}{1-x} < \frac{\epsilon}{3}.$$

Dus geldt voor $x \in [0, 1]$ dat

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |s_n| + |s_m| + \tfrac{\epsilon}{3} < \epsilon.$$

We zien dat (f_n) uniform Cauchy is op $[0, 1]$, dus uniform convergent. Voor elke n is f_n continu op $[0, 1]$, dus de limietfunctie f ook.

Stelling van Abel

Stelling van Abel (26.6)

Stel dat $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks is met convergentiestraal R. Als de reeks convergeert in $x = R$, dan is f continu op $(-R, R]$. Zelfde voor $x = -R$.

Stelling van Abel, basisgeval (bewezen)

Stel dat $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks is met convergentiestraal 1. Als de reeks convergeert in $x = 1$ met $g(1) = 0$, dan is g continu op $(-1, 1]$.

Stelling van Abel

Stelling van Abel (26.6)

Stel dat $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks is met convergentiestraal R. Als de reeks convergeert in $x = R$, dan is f continu op $(-R, R]$. Zelfde voor $x = -R$.

Stelling van Abel, basisgeval (bewezen)

Stel dat $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks is met convergentiestraal 1. Als de reeks convergeert in $x = 1$ met $g(1) = 0$, dan is g continu op $(-1, 1]$.

Bewijs van het algemene geval:

Stelling van Abel

Stelling van Abel (26.6)

Stel dat $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks is met convergentiestraal R. Als de reeks convergeert in $x = R$, dan is f continu op $(-R, R]$. Zelfde voor $x = -R$.

Stelling van Abel, basisgeval (bewezen)

Stel dat $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks is met convergentiestraal 1. Als de reeks convergeert in $x = 1$ met $g(1) = 0$, dan is g continu op $(-1, 1]$.

Bewijs van het algemene geval: stel dat de machtreeks convergentiestraal R heeft en in $x = R$ convergeert.

Stelling van Abel

Stelling van Abel (26.6)

Stel dat $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks is met convergentiestraal R. Als de reeks convergeert in $x = R$, dan is f continu op $(-R, R]$. Zelfde voor $x = -R$.

Stelling van Abel, basisgeval (bewezen)

Stel dat $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks is met convergentiestraal 1. Als de reeks convergeert in $x = 1$ met $g(1) = 0$, dan is g continu op $(-1, 1]$.

Bewijs van het algemene geval: stel dat de machtreeks convergentiestraal R heeft en in $x = R$ convergeert. Bekijk dan

$$g(x) = f(Rx) - f(R)$$

Stelling van Abel

Stelling van Abel (26.6)

Stel dat $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks is met convergentiestraal R. Als de reeks convergeert in $x = R$, dan is f continu op $(-R, R]$. Zelfde voor $x = -R$.

Stelling van Abel, basisgeval (bewezen)

Stel dat $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks is met convergentiestraal 1. Als de reeks convergeert in $x = 1$ met $g(1) = 0$, dan is g continu op $(-1, 1]$.

Bewijs van het algemene geval: stel dat de machtreeks convergentiestraal R heeft en in $x = R$ convergeert. Bekijk dan

$$g(x) = f(Rx) - f(R) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n x^n - f(R).$$

Stelling van Abel

Stelling van Abel (26.6)

Stel dat $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks is met convergentiestraal R. Als de reeks convergeert in $x = R$, dan is f continu op $(-R, R]$. Zelfde voor $x = -R$.

Stelling van Abel, basisgeval (bewezen)

Stel dat $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks is met convergentiestraal 1. Als de reeks convergeert in $x = 1$ met $g(1) = 0$, dan is g continu op $(-1, 1]$.

Bewijs van het algemene geval: stel dat de machtreeks convergentiestraal R heeft en in $x = R$ convergeert. Bekijk dan

$$g(x) = f(Rx) - f(R) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n x^n - f(R).$$

Dit is een machtreeks

Stelling van Abel

Stelling van Abel (26.6)

Stel dat $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks is met convergentiestraal R. Als de reeks convergeert in $x = R$, dan is f continu op $(-R, R]$. Zelfde voor $x = -R$.

Stelling van Abel, basisgeval (bewezen)

Stel dat $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks is met convergentiestraal 1. Als de reeks convergeert in $x = 1$ met $g(1) = 0$, dan is g continu op $(-1, 1]$.

Bewijs van het algemene geval: stel dat de machtreeks convergentiestraal R heeft en in $x = R$ convergeert. Bekijk dan

$$g(x) = f(Rx) - f(R) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n x^n - f(R).$$

Dit is een machtreeks met convergentiestraal 1

Stelling van Abel

Stelling van Abel (26.6)

Stel dat $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks is met convergentiestraal R. Als de reeks convergeert in $x = R$, dan is f continu op $(-R, R]$. Zelfde voor $x = -R$.

Stelling van Abel, basisgeval (bewezen)

Stel dat $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks is met convergentiestraal 1. Als de reeks convergeert in $x = 1$ met $g(1) = 0$, dan is g continu op $(-1, 1]$.

Bewijs van het algemene geval: stel dat de machtreeks convergentiestraal R heeft en in $x = R$ convergeert. Bekijk dan

$$g(x) = f(Rx) - f(R) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n x^n - f(R).$$

Dit is een machtreeks met convergentiestraal 1 die in $x = 1$ convergeert.

Stelling van Abel

Stelling van Abel (26.6)

Stel dat $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks is met convergentiestraal R. Als de reeks convergeert in $x = R$, dan is f continu op $(-R, R]$. Zelfde voor $x = -R$.

Stelling van Abel, basisgeval (bewezen)

Stel dat $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks is met convergentiestraal 1. Als de reeks convergeert in $x = 1$ met $g(1) = 0$, dan is g continu op $(-1, 1]$.

Bewijs van het algemene geval: stel dat de machtreeks convergentiestraal R heeft en in $x = R$ convergeert. Bekijk dan

$$g(x) = f(Rx) - f(R) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n x^n - f(R).$$

Dit is een machtreeks met convergentiestraal 1 die in $x = 1$ convergeert. Verder geldt $g(1) = 0$

Stelling van Abel

Stelling van Abel (26.6)

Stel dat $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks is met convergentiestraal R. Als de reeks convergeert in $x = R$, dan is f continu op $(-R, R]$. Zelfde voor $x = -R$.

Stelling van Abel, basisgeval (bewezen)

Stel dat $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks is met convergentiestraal 1. Als de reeks convergeert in $x = 1$ met $g(1) = 0$, dan is g continu op $(-1, 1]$.

Bewijs van het algemene geval: stel dat de machtreeks convergentiestraal R heeft en in $x = R$ convergeert. Bekijk dan

$$g(x) = f(Rx) - f(R) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n x^n - f(R).$$

Dit is een machtreeks met convergentiestraal 1 die in $x = 1$ convergeert. Verder geldt $g(1) = 0$, dus is g continu op $(-1, 1]$.

Stelling van Abel

Stelling van Abel (26.6)

Stel dat $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks is met convergentiestraal R. Als de reeks convergeert in $x = R$, dan is f continu op $(-R, R]$. Zelfde voor $x = -R$.

Stelling van Abel, basisgeval (bewezen)

Stel dat $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks is met convergentiestraal 1. Als de reeks convergeert in $x = 1$ met $g(1) = 0$, dan is g continu op $(-1, 1]$.

Bewijs van het algemene geval: stel dat de machtreeks convergentiestraal R heeft en in $x = R$ convergeert. Bekijk dan

$$g(x) = f(Rx) - f(R) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n x^n - f(R).$$

Dit is een machtreeks met convergentiestraal 1 die in $x = 1$ convergeert. Verder geldt $g(1) = 0$, dus is g continu op $(-1, 1]$. Dan is $f(x)$

Stelling van Abel

Stelling van Abel (26.6)

Stel dat $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks is met convergentiestraal R. Als de reeks convergeert in $x = R$, dan is f continu op $(-R, R]$. Zelfde voor $x = -R$.

Stelling van Abel, basisgeval (bewezen)

Stel dat $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks is met convergentiestraal 1. Als de reeks convergeert in $x = 1$ met $g(1) = 0$, dan is g continu op $(-1, 1]$.

Bewijs van het algemene geval: stel dat de machtreeks convergentiestraal R heeft en in $x = R$ convergeert. Bekijk dan

$$g(x) = f(Rx) - f(R) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n x^n - f(R).$$

Dit is een machtreeks met convergentiestraal 1 die in $x = 1$ convergeert. Verder geldt $g(1) = 0$, dus is g continu op $(-1, 1]$. Dan is $f(x) = g(x/R) + f(R)$

Stelling van Abel

Stelling van Abel (26.6)

Stel dat $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks is met convergentiestraal R. Als de reeks convergeert in $x = R$, dan is f continu op $(-R, R]$. Zelfde voor $x = -R$.

Stelling van Abel, basisgeval (bewezen)

Stel dat $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks is met convergentiestraal 1. Als de reeks convergeert in $x = 1$ met $g(1) = 0$, dan is g continu op $(-1, 1]$.

Bewijs van het algemene geval: stel dat de machtreeks convergentiestraal R heeft en in $x = R$ convergeert. Bekijk dan

$$g(x) = f(Rx) - f(R) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n x^n - f(R).$$

Dit is een machtreeks met convergentiestraal 1 die in $x = 1$ convergeert. Verder geldt $g(1) = 0$, dus is g continu op $(-1, 1]$. Dan is $f(x) = g(x/R) + f(R)$ continu op $(-R, R]$.

Stelling van Abel

Stelling van Abel (26.6)

Stel dat $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks is met convergentiestraal R. Als de reeks convergeert in $x = R$, dan is f continu op $(-R, R]$. Zelfde voor $x = -R$.

Stelling van Abel, basisgeval (bewezen)

Stel dat $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks is met convergentiestraal 1. Als de reeks convergeert in $x = 1$ met $g(1) = 0$, dan is g continu op $(-1, 1]$.

Bewijs van het algemene geval: stel dat de machtreeks convergentiestraal R heeft en in $x = -R$ convergeert. Bekijk dan

$$g(x) = f(-Rx) - f(-R) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n x^n - f(-R).$$

Dit is een machtreeks met convergentiestraal 1 die in $x = 1$ convergeert. Verder geldt $g(1) = 0$, dus is g continu op $(-1, 1]$. Dan is $f(x) = g(-x/R) + f(-R)$ continu op $[-R, R)$.