Analyse: van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}^n$ hoorcollege

Regel van l'Hospital (7)

Gerrit Oomens
G.Oomens@uva.nl

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica
Universiteit van Amsterdam

Voorbereiding

Gegeneraliseerde middelwaardestelling (30.1)

Zij f en g differentieerbare functies op $[a,b]$. Dan is er een $\xi \in (a,b)$ zodat

$$g'(\xi)[f(b)-f(a)] = f'(\xi)[g(b)-g(a)].$$

Bewijs: definieer

$$h(x) = g(x)[f(b)-f(a)] - f(x)[g(b)-g(a)].$$

Merk op dat

$$h(a) = g(a)[f(b)-f(a)] - f(a)[g(b)-g(a)] = g(a)f(b) - f(a)g(b)$$
$$h(b) = g(b)[f(b)-f(a)] - f(b)[g(b)-g(a)] = -g(b)f(a) + f(b)g(a)$$

We zien $h(a) = h(b)$, dus $h'(\xi) = 0$ voor zekere $\xi \in (a,b)$.

Stelling van Rolle

Zij h differentieerbaar op $[a,b]$ zodat $h(a) = h(b)$. Dan is er tenminste één $\xi \in (a,b)$ zodat $h'(\xi) = 0$.

L'Hospital

Regel van L'Hospital (30.2)

Zij f en g differentieerbaar met $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$. Dan is

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Bewijs: stel dat $f(a) = g(a) = 0$ en bekijk voor $x > a$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}$$

voor zekere $\xi_x \in (a,x)$. Laat nu $x \to a^+$, dan geldt $\xi_x \to a^+$ en dus

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Gegeneraliseerde middelwaardestelling

Zij f en g differentieerbare functies op $[a,b]$. Dan is er een $\xi \in (a,b)$ zodat

$$g'(\xi)[f(b)-f(a)] = f'(\xi)[g(b)-g(a)].$$

Uitbreiden

Regel van L'Hospital, basis (bewezen)

Zij f en g differentieerbaar met $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$. Dan is

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Regel van L'Hospital, algemeen

Zij f en g differentieerbaar met $\lim_{x\to s} f(x) = \lim_{x\to s} g(x) = 0$, waar s gelijk is aan ∞, $-\infty$, a, a^+ of a^-. Dan is

$$\lim_{x\to s} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to s} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Regel van L'Hospital, variant

Zij f en g differentieerbaar met $\lim_{x\to a^+} |g(x)| = \infty$ voor $a \in \mathbb{R}$. Dan is

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: L.$$

Regel van L'Hospital (30.2)

Zij f en g differentieerbaar met $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$. Dan is

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: L.$$

Claim

Als $L_1 > L$, dan bestaat er $\alpha_1 > a$ zodat $\frac{f(x)}{g(x)} \leq L_1$ als $a < x < \alpha_1$.

- Kies een $b > a$ zodat $g' \neq 0$ en $g \neq 0$ op (a, b).
- Er bestaat $\alpha \in (a, b)$ zodat $\frac{f'(x)}{g'(x)} < L_1$ als $x \in (a, \alpha)$.
- Als $a < x < y < \alpha$, dan is er $z \in (x, y)$ zodat

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(z)}{g'(z)} < L_1.$$

- Nu is

$$\frac{f(y)}{g(y)} = \lim_{x\to a_+} \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} \leq L_1.$$

Bewijs van L'Hospital

Regel van L'Hospital (30.2)

Zij f en g differentieerbaar met $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$. Dan is

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: L.$$

Claim (bewezen)

Als $L_1 > L$, dan bestaat er $\alpha_1 > a$ zodat $\frac{f(x)}{g(x)} \leq L_1$ als $a < x < \alpha_1$.

Claim (identiek)

Als $L_2 < L$, dan bestaat er $\alpha_2 > a$ zodat $\frac{f(x)}{g(x)} \geq L_2$ als $a < x < \alpha_2$.

Bewijs van L'Hospital: voor alle $L_2 < L < L_1$ geldt

$$L_2 \leq \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} \leq L_1.$$

Laat nu $L_2 \to L$ en $L_1 \to L$.

Uitbreiden

Regel van L'Hospital, basis (bewezen)

Zij f en g differentieerbaar met $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$. Dan is

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: L.$$

Claims uit het bewijs

Als $L_1 > L$, dan bestaat er $\alpha_1 > a$ zodat $\frac{f(x)}{g(x)} \leq L_1$ als $a < x < \alpha_1$.

Als $L_2 < L$, dan bestaat er $\alpha_2 > a$ zodat $\frac{f(x)}{g(x)} \geq L_2$ als $a < x < \alpha_2$.

Regel van L'Hospital, algemeen

Zij f en g differentieerbaar met $\lim_{x\to s} f(x) = \lim_{x\to s} g(x) = 0$, waar s gelijk is aan ∞, $-\infty$, a, a^+ of a^-. Dan is

$$\lim_{x\to s} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to s} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Regel van L'Hospital, variant

Zij f en g differentieerbaar met $\lim_{x\to a^+} |g(x)| = \infty$ voor $a \in \mathbb{R}$. Dan is

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: L.$$

- Neem $L_1 > L$ en kies een interval (a, b) zodat $g' = < 0$ en $g \neq 0$ op (a, b).
- Er bestaat $\alpha > a$ zodat $\frac{f'(x)}{g'(x)} < L_1$ als $x \in (a, \alpha)$.
- Als $a < x < y < \alpha$, dan is er $z \in (x, y)$ zodat

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(z)}{g'(z)} < L_1.$$

- Merk op dat $\lim_{x\to a^+} g(x) = \infty$ en dus $g > 0$ op (a, b). Dan is $\frac{g(x)-g(y)}{g(x)} > 0$, dus

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x)} < L_1 \frac{g(x) - g(y)}{g(x)}$$

zodat

$$\frac{f(x)}{g(x)} < L_1 \frac{g(x) - g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)} = L_1 + \frac{f(y) - L_1 g(y)}{g(x)}.$$

- Dan geldt $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \lim_{x\to a^+} \left[L_1 + \frac{f(y)-L_1 g(y)}{g(x)}\right] = L_1$.

Voorbeelden

Regel van L'Hospital

Zij f en g differentieerbaar met $\lim_{x\to s} f(x) = \lim_{x\to s} g(x) = 0$ of $\lim_{x\to s} |g(x)| = \infty$. Dan is

$$\lim_{x\to s} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to s} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Bekijk

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2x} = -\frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = -\frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = -\frac{1}{2}$$

en

$$\lim_{x\to 0^+} x \log x = \lim_{x\to 0} \frac{\log x}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{-1} = 0.$$