Analyse: van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}^n$ hoorcollege

Stelling van Taylor (8)

Gerrit Oomens
G.Oomens@uva.nl

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica
Universiteit van Amsterdam

Intermezzo: tussenwaarde-eigenschap en continuïteit

We gebruikten vorige keer: als f differentieerbaar op (a, b) en er zijn $x, y \in (a, b)$ zodat $f'(x) > 0$ en $f'(y) < 0$, dan bestaat er $z \in (a, b)$ zodat $f'(z) = 0$.

Tussenwaarde-eigenschap

Een functie g op een interval (a, b) heeft de tussenwaarde-eigenschap als geldt: voor alle $x < y$ in (a, b) en c tussen $g(x)$ en $g(y)$ bestaat er $z \in (x, y)$ met $g(z) = c$.

Tussenwaardenstelling (18.2)

Stel dat g continu is op (a, b). Dan heeft g de tussenwaarde-eigenschap op (a, b).

Tussenwaardestelling voor afgeleides (29.8)

Zij f differentieerbaar op (a, b). Dan heeft f' de tussenwaarde-eigenschap op (a, b).

Bewijs: neem $x < y$ in (a, b) en $f'(x) < c < f'(y)$. Definieer $h(x) = f(x) - cx$, zodat

$$h'(x) = f'(x) - c < 0, \qquad h'(y) = f'(y) - c > 0.$$

De functie h is continu, dus neemt een minimum aan in $z \in [x, y]$. Door bovenstaande is dat niet in x of y, dus $z \in (x, y)$. Dan geldt

$$f'(z) - c = h'(z) = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(z) = c.$$

Intermezzo: tussenwaarde-eigenschap en continuïteit

Tussenwaarde-eigenschap

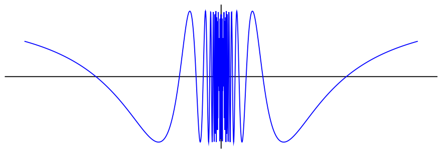
Een functie g op een interval (a, b) heeft de tussenwaarde-eigenschap als geldt: voor alle $x < y$ in (a, b) en c tussen $g(x)$ en $g(y)$ bestaat er $z \in (x, y)$ met $g(z) = c$.

Tussenwaardestelling voor afgeleides (29.8)

Zij f differentieerbaar op (a, b). Dan heeft f' de tussenwaarde-eigenschap op (a, b).

Afgeleides lijken dus erg op continue functies. Maar er bestaan wel functies die aan de tussenwaarde-eigenschap voldoen, maar niet continu zijn, zoals

$$g(x) = \begin{cases} \cos(1/x) & \text{als } x \neq 0, \\ 0 & \text{als } x = 0. \end{cases}$$



Machtreeksen en afgeleides

Bekijk een machtreeks $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ met positieve convergentiestraal. Er geldt

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}, \qquad f''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2}$$

en meer algemeen

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1) a_k x^{k-n}.$$

Merk op dat

$$f(0) = a_0, \quad f'(0) = 1 \cdot a_1, \quad f''(0) = 2 \cdot 1 \cdot a_2, \qquad f^{(3)}(0) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_3$$

en algemeen $f^{(n)}(0) = n \cdots 2 \cdot 1 \cdot a_n = n! a_n$. Dus voor een machtreeks is $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Als we nu een willekeurige oneindig vaak differentieerbare functie (een C^∞-functie) willen schrijven als machtreeks, ligt het voor de hand om te kijken naar

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Taylorreeksen

Zij f een functie die oneindig vaak differentieerbaar is in 0. Dan noemen we

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

de Taylorreeks van f rond het punt 0. We bekijken de n-de restterm

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

We willen nu weten of de reeks convergeert naar f, dus of $R_n \to 0$ rond 0.

Meer algemeen kunnen we naar Taylorreeksen om een punt c kijken:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k, \qquad R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$

en willen we weten of $R_n \to 0$ rond c.

Restterm

Stelling van Taylor (31.3)

Zij f een n-keer differentieerbare functie op (a,b) en neem $c \in (a,b)$. Dan is voor elke $x \in (a,b)$ een y tussen c en x zodat

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k =: R_n(x) = \frac{f^{(n)}(y)}{n!}(x-c)^n.$$

Bewijs: neem $x \neq c$ vast en laat M zodat

$$R_n(x) = \frac{M}{n!}(x-c)^n, \qquad \text{dus} \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + \frac{M}{n!}(x-c)^n.$$

Bekijk nu

$$g(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(t-c)^k + \frac{M}{n!}(t-c)^n - f(t).$$

Merk op dat geldt $g(c) = 0$, $g'(c) = 0$, $\cdots$, $g^{(n-1)}(c) = 0$. Maar ook $g(x) = 0$, dus geeft Rolle $g'(x_1) = 0$ voor zekere $x_1 \in (x,c)$. Nog een keer Rolle geeft $g''(x_2) = 0$ voor zekere x_2. Herhalen geeft $g^{(n)}(y)$=0 voor zekere y. Merk op dat $g^{(n)}(t) = M - f^{(n)}(t)$, dus er volgt $M = f^{(n)}(y)$ zoals gewenst.

Convergentie van Taylorreeksen

Stelling van Taylor (31.3)

Zij f een n-keer differentieerbare functie op (a,b) en neem $c \in (a,b)$. Dan is voor elke $x \in (a,b)$ een y tussen c en x zodat

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k =: R_n(x) = \frac{f^{(n)}(y)}{n!}(x-c)^n.$$

Als we nu willen dat de Taylorreeks $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$ van een C^∞ functie f convergeert, willen we dat R_n klein is:

$$|R_n(x)| \leq \frac{|f^{(n)}(y_x)|}{n!}|x-c|^n \leq \frac{\sup_{t \in (a,b)} |f^{(n)}(t)|}{n!}|x-c|^n.$$

Als we nu aannemen dat alle afgeleides van f begrensd zijn door één constante C (dus $|f^{(n)}(x)| \leq C$ voor alle $x \in (a,b)$ en $n \in \mathbb{N}$), dan geldt

$$|R_n(x)| \leq C\frac{|x-c|^n}{n!} \to 0.$$

Voorbeelden

Convergentie van Taylorreeksen (Gevolg 31.4)

Stel dat f een C^∞-functie is op (a,b) en dat er een C is zodat $|f^{(k)}(x)| \leq C$ voor alle k en x. Dan convergeert de Taylorreeks $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$ van f naar $f(x)$ voor alle $x \in (a,b)$.

- Bekijk $f(x) = e^x$ op $(-M, M)$. Dan geldt $f^{(k)}(x) = e^x$ voor alle k, dus ook $|f^{(k)}(x)| \leq e^M$ voor alle x en k. Met $c = 0$ zien we dat

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = e^x, \quad \text{voor} \quad x \in \mathbb{R}.$$

- Bekijk $f(x) = \sin x$.
  1. Bepaal $f^{(k)}(x)$ voor alle k.
  2. Geef de Taylorreeks van f om 0.
  3. Laat zien dat deze voor alle $x \in \mathbb{R}$ naar $\sin x$ convergeert.

Resttermen

Stelling van Taylor, integraalvariant (31.5)

Zij f een n-keer continu differentieerbare functie op (a,b) en neem $c \in (a,b)$. Dan is voor elke $x \in (a,b)$ een y tussen c en x zodat

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k =: R_n(x) = \int_c^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Bewijs: we passen inductie toe. Voor $n = 1$ geldt

$$R_1(x) = f(x) - f(c) = \int_c^x f'(t)\,\mathrm{d}t$$

volgens de hoofdstelling van de Calculus. Stel het geldt voor zekere n. We hebben

$$R_{n+1}(x) = R_n(x) - \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

en

$$R_n(x) = \int_c^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t)\right]_c^x + \int_c^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{(x-c)^n}{n!} f^{(n)}(c) + \int_c^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

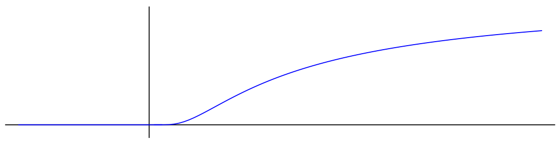
Voorbeeld: een handige functie

Bekijk $f(x) = e^{-1/x}$ voor $x > 0$ en $f(x) = 0$ voor $x \leq 0$. We bepalen de Taylorreeks $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ van f in 0. Voor $x > 0$ geldt

$$f'(x) = \tfrac{1}{x^2} e^{-1/x}, \qquad f''(x) = -\tfrac{1}{x^3} e^{-1/x} + \tfrac{1}{x^4} e^{-1/x} = e^{-1/x}\left(\tfrac{1}{x^4} - \tfrac{1}{x^3}\right).$$

In $x = 0$ hebben we

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{-1/h} - 0}{h} = \lim_{y\to\infty} y e^{-y} = \lim_{y\to\infty} \frac{y}{e^y} = 0$$
$$f''(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{h^2} e^{-1/h} - 0}{h} = \lim_{y\to\infty} y^3 e^{-y} = 0.$$



Voorbeeld: een handige functie

Bekijk $f(x) = e^{-1/x}$ voor $x > 0$ en $f(x) = 0$ voor $x \leq 0$. We bepalen de Taylorreeks $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ van f in 0. Voor $x > 0$ en alle n geldt

$$f^{(n)}(x) = e^{-1/x} p_n\left(\tfrac{1}{x}\right),$$

waar p_n een polynoom van graad $2n$ is. Dit volgt met inductie. Evenzo bewijzen we dat $f^{(n)}(0) = 0$ voor alle n met inductie:

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \tfrac{1}{h} e^{-1/h} p_n\left(\tfrac{1}{h}\right) = \lim_{y\to\infty} y e^{-y} p_n(y) = 0.$$

We zien dus dat $f^{(n)}(0) = 0$ voor alle n. De Taylorreeks van f om 0 is dus

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{0}{n!} x^n = 0.$$

In het bijzonder convergeert deze alleen naar f voor $x \leq 0$. De functie f is wel C^∞, maar niet analytisch in 0: hij is niet gelijk aan zijn machtreeksontwikkeling.

Bionomiaalcoëfficiënten

Herinner: het binomium van Newton zegt dat voor $a, b \in \mathbb{R}$ geldt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

In het bijzonder hebben we voor $n \in \mathbb{N}$ en $x \in \mathbb{R}$ de identiteit

$$(1+x)^n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} x^k.$$

Dit breidt uit naar reëelwaardige exponenten (Stelling 31.7): voor $\alpha \in \mathbb{R}$ en $|x| < 1$ is

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k.$$

Dus er geldt bijvoorbeeld voor $|x| < 1$ dat

$$\sqrt{x} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-k+1)}{k!}(x-1)^k,$$

de Taylorontwikkeling van de wortel om $x = 1$.