OPGAVEN BIJ ANALYSE 2015, TAYLORREEKSEN (8)

Opgave 1. Zij f een functie die oneindig vaak differentieerbaar is op $(-a, a)$ en laat $[-b, b] \subseteq (-a, a)$ een deelinterval. Bewijs dat er voor elke n een constante C_n bestaat zodat voor de restterm R_n van de Taylorreeks om 0 geldt

$$|R_n(x)| \leq C_n|x|^n$$

op $[-b, b]$.

Opgave 2. Bepaal de Taylorreeks van $\sin x^2$. Geef de eerste 3 (relevante) termen en een afschatting voor de restterm.

Opgave 3. Bewijs dat op een interval rond 0 geldt

(a) $\sin x = x + R(x)$, waarbij $|R(x)| \leq C|x|^3$ voor zekere $C > 0$.
(b) $(\sin x)^2 = x^2 + R(x)$, waarbij $|R(x)| \leq C|x|^4|$ voor zekere $C > 0$.
(c) $(\cos x)^2 - 1 = -x^2 + R(x)$, waarbij $|R(x)| \leq C|x|^4$ voor zekere $C > 0$.