Analyse: van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}^n$ hoorcollege

O symbolen, Taylor en limieten (9)

Gerrit Oomens
G.Oomens@uva.nl

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica
Universiteit van Amsterdam

O-symbolen

Grote O-symbool van Landau

Zij $f, g \colon S \to \mathbb{R}$ functies op $S \subseteq \mathbb{R}$ en $a \in S$. We schrijven

$$f(x) = O(g(x)) \quad \text{voor} \quad x \to a$$

als er een $C > 0$ bestaat zodat $|f(x)| \leq C|g(x)|$ op een omgeving van a. Meer precies: er bestaat $\delta > 0$ zodat de ongelijkheid geldt op $(a - \delta, a + \delta)$.

Zo geldt bijvoorbeeld $x^3 = O(x)$ voor $x \to 0$. Let op: het $=$-teken is misleidend, de uitspraak $O(x) = x^3$ is betekenisloos, en hoewel ook $x^2 = O(x)$, geldt niet $x^3 = x^2$.

Merk op: $f(x) = O(g(x))$ voor $x \to a$ desda $\frac{f(x)}{g(x)}$ begrensd is rond a. Voor later:

Kleine o-symbool van Landau

Zij $f, g \colon S \to \mathbb{R}$ functies op $S \subseteq \mathbb{R}$ en $a \in S$. We schrijven

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{voor} \quad x \to a$$

als geldt $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Taylor in O-symbolen

Grote O-symbool van Landau

Zij $f, g \colon S \to \mathbb{R}$ functies op $S \subseteq \mathbb{R}$ en $a \in S$. We schrijven

$$f(x) = O(g(x)) \quad \text{voor} \quad x \to a$$

als er een $C > 0$ en $\delta > 0$ bestaan zodat $|f(x)| \leq C|g(x)|$ op $(a - \delta, a + \delta)$.

Stelling van Taylor (31.3)

Zij f een n-keer differentieerbare functie op (a, b) en neem $c \in (a, b)$. Dan is voor elke $x \in (a, b)$ een y tussen c en x zodat

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x - c)^k =: R_n(x) = \frac{f^{(n)}(y)}{n!}(x - c)^n.$$

Merk op: voor $x \in (c - \delta, c + \delta)$ geldt

$$|R_n(x)| = \frac{|f^{(n)}(y)|}{n!}|x - c|^n \leq \frac{\sup_{t \in (c - \delta, c + \delta)} |f^{(n)}(t)|}{n!}|x - c|^n.$$

Dus als $f^{(n)}(t)$ begrensd is rond c geldt $R_n(x) = O(|x - c|^n)$ voor $x \to c$. Dit is zeker het geval als $f^{(n)}$ continu is.

Taylor in O-symbolen

Stelling van Taylor, variant met O

Zij f een n-keer continu differentieerbare functie op (a, b) en neem $c \in (a, b)$. Dan

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x - c)^k =: R_n(x) = O(|x - c|^n) \quad \text{voor } x \to c.$$

oftewel

Stelling van Taylor, variant met O

Zij f een n-keer continu differentieerbare functie op (a, b) en neem $c \in (a, b)$. Dan

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x - c)^k + O(|x - c|^n) \quad \text{voor } x \to c.$$

We schrijven

$$f(x) = g(x) + O(h(x)) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) - g(x) = O(h(x)).$$

Oftewel: er is een functie r met $f = g + r$ en $r(x) = O(h(x))$.

Voorbeeld: limieten berekenen met Taylor

We hebben bewezen:

$$\sin(x) = x + O(|x|^3) \quad \text{voor } x \to 0.$$

Zo ook geldt $\cos x = 1 + O(x^2)$ en $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)$ voor $x \to 0$.

We kunnen Taylor toepassen om bepaalde limieten te berekenen:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x^7)}{x^{14}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^{14}}{2} + O(x^{28})}{x^{14}} = \frac{1}{2} + \lim_{x\to 0} \frac{O(x^{28})}{x^{14}} = \frac{1}{2}$$

want

$$\cos(x^7) = 1 - \frac{(x^7)^2}{2} + O\big((x^7)^4\big) = 1 - \frac{x^{14}}{2} + O\big(x^{28}\big).$$

en

$$\left|\frac{O(x^{28})}{x^{14}}\right| \leq \frac{Cx^{28}}{x^{14}} = Cx^{14} \to 0 \quad \text{voor } x \to 0.$$