Universiteit van Amsterdam

Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica

Tentamen

Analyse: van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}^n$

Bachelor wiskunde jaar 1

Deeltoets
Datum: donderdag 16 april 2015
Tijd: 15.00-18.00

Aantal pagina's: 2 (inclusief voorblad)
Aantal vragen: 6
Maximum aantal te behalen punten: 60
Bij iedere vraag staat vermeld hoeveel punten hij waard is.

VOORDAT U BEGINT

- Controleer of uw versie van het tentamen compleet is.
- Schrijf **uw naam en studentnummer** en indien van toepassing **versienummer** op **elk vel papier** dat u inlevert en **nummer de pagina's**.
- Uw **mobiele telefoon** moet uit staan en in uw jas of tas zitten. **Uw jas en tas** moeten op de grond liggen.
- **Toegestane hulpmiddelen**: kladpapier. Overige hulpmiddelen zijn niet toegestaan.

HUISHOUDELIJKE MEDEDELINGEN

- De eerste 30 minuten mag u de zaal niet verlaten, ook niet voor het bezoeken van het toilet.
- 15 minuten voor het eind wordt u gewaarschuwd dat het inlevertijdstip nadert.
- Vul na afloop van het tentamen het evaluatieformulier in, indien van toepassing.
- U bent verplicht zich op verzoek van de examinator (of diens vertegenwoordiger) te kunnen legitimeren met een bewijs van inschrijving en een geldig legitimatiebewijs.
- Tijdens het tentamen is toiletbezoek niet toegestaan, tenzij de surveillant hier toestemming voor geeft.

Succes!

Leg altijd je antwoorden uit. Bij vragen die beginnen met "bepaal" of "geef" is een formeel bewijs niet noodzakelijk, tenzij anders vermeld.

Opgave 1. Formuleer en bewijs de Stelling van Abel. Je mag zonder bewijs gebruik maken van partiële sommatie; geef dan wel duidelijk aan hoe je het toepast. [10 pt]

Opgave 2. Bekijk de volgende twee metrieken op $\mathbb{R}^2$:

$$d_2(\vec{x},\vec{y}) = \sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2}, \qquad d_\infty(\vec{x},\vec{y}) = \max\big(|y_1-x_1|,|y_2-x_2|\big).$$

Laat zien dat deze metrieken equivalent zijn; d.w.z. als $\vec{x}^{(n)} \to \vec{x}$ geldt in één van de twee metrieken, dan ook in de andere. Bewijs beide implicaties. [10 pt]

Opgave 3. Convergeren de volgende reeksen? Bewijs je antwoord.

(a) $\sum \dfrac{\cos(\pi n/2)}{n}$ [3 pt]

(b) $\sum \dfrac{1}{\log(n!)+n}$ [3 pt]

Bepaal de convergentiestraal van de volgende machtreeks:

(c) $\sum \dfrac{3^n}{n^2}x^{2n}$ [4 pt]

Opgave 4. Bekijk de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{t}\, e^{-nt}.$$

(a) Bewijs dat deze reeks puntsgewijs convergeert op $[0,\infty)$. [3 pt]
(b) Bewijs dat deze reeks uniform convergeert op $[\delta,\infty)$ voor elke $\delta > 0$. [3 pt]
(c) Geldt het resultaat uit (b) ook als $\delta = 0$? Bewijs je antwoord. [4 pt]

Opgave 5. Zij (S,d) een metrische ruimte en $E \subseteq S$.

(a) Geef de definitie van het inwendige E° van E. [2 pt]
(b) Bewijs dat het inwendige E° van E open is. [4 pt]
(c) Bewijs dat het inwendige de grootste open verzameling is die bevat is in E, oftewel: als $U \subseteq E$ open, dan geldt $U \subseteq E^\circ$. [4 pt]

Opgave 6.

(a) Bewijs dat

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O\big(x^7\big). \quad [3\text{ pt}]$$

(b) Bepaal de waarde van de volgende limiet en bewijs dat je resultaat correct is:

$$\lim_{x\to 0} \frac{6(\sin x - x)^2 - \frac{1}{6}x^6}{x^8}. \quad [7\text{ pt}]$$