Analyse: van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}^n$ practicum 11

V7.1abcd, V7.2abd, V7.1ef

Gerrit Oomens
G.Oomens@uva.nl

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica
Universiteit van Amsterdam

26 april 2013

Opgave V7.2a

Bepaal de extrema van $f(x,y) = 2x^4 - 3x^2y + y^2$ op $E = \{(x,y) \mid 4x^2 + y \leq 4\}$.

We hebben

$$(D_1 f)(x,y) = 8x^3 - 6xy, \qquad (D_2 f)(x,y) = -3x^2 + 2y.$$

Oplossen $D_1 f = 0$ geeft $x = 0$ of $8x^2 = 6y$ en $D_2 f = 0$ geeft $9x^2 = 6y$. Dit geeft $(x,y) = (0,0)$ als enige stationaire punt. Nu

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 24x^2 - 6y & -6x \\ -6x & 2 \end{bmatrix}, \qquad H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

dus dit geeft geen informatie. We zien echter dat $f(0,0) = 0$ en

$$f(x,0) = 2x^4 > 0, \qquad f\left(x, \tfrac{3}{2}x^2\right) = 2x^4 - \tfrac{9}{2}x^4 + \tfrac{9}{4}x^4 = -\tfrac{1}{4}x^4 < 0.$$

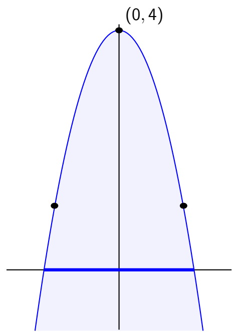
Er zijn dus geen inwendige extrema.

Opgave V7.2a

Bepaal de extrema van $f(x,y) = 2x^4 - 3x^2y + y^2$ op $E = \{(x,y) \mid 4x^2 + y \leq 4\}$.

Er zijn geen inwendige extrema. We bekijken de rand $y = 4 - 4x^2$. We kijken naar

$$g(x) = f(x, 4 - 4x^2) = 30x^4 - 44x^2 + 16.$$



Extrema:

x	y	$f(x,y)$	
0	4	16	max van g
$\pm\sqrt{\frac{11}{15}}$	$\frac{16}{15}$	$-\frac{2}{15}$	min van g

Merk op: op $E^* = \{(x,y) : 4x^2 + y \leq 4 \text{ en } y \geq 0\}$ neemt f een maximum en minimum aan. Op $y = 0$ geldt $f(x,0) = 2x^4 \in [0,2]$. Dus $(0,4)$ is hier een absoluut maximum, $\left(\pm\sqrt{\frac{11}{15}}, \frac{16}{15}\right)$ een absoluut minimum. Op E idem, maar $(0,4)$ is niet absoluut.