Analyse: van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}^n$ practicum 12

V7.1, V7.2

Gerrit Oomens
G.Oomens@uva.nl

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica
Universiteit van Amsterdam

3 mei 2013

Taylorreeks

Zij $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ een C^3 functie. We zagen dat

$$\begin{aligned} f(\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{h}}) &= \sum_{j_1+j_2\le 2} \frac{D_1^{j_1} D_2^{j_2} f(\vec{\mathbf{a}})}{j_1!j_2!} h_1^{j_1} h_2^{j_2} + O(\|\vec{\mathbf{h}}\|^3) \\ &= f(\vec{\mathbf{a}}) + D_1 f(\vec{\mathbf{a}})h_1 + D_2 f(\vec{\mathbf{a}})h_2 \\ &\qquad + \tfrac{1}{2} D_1^2 f(\vec{\mathbf{a}})h_1^2 + D_1D_2 f(\vec{\mathbf{a}})h_1h_2 + \tfrac{1}{2} D_2^2 f(\vec{\mathbf{a}})h_2^2 + O(\|\vec{\mathbf{h}}\|^3) \\ &= f(\vec{\mathbf{a}}) + \begin{bmatrix} D_1 f(\vec{\mathbf{a}}) & D_2 f(\vec{\mathbf{a}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \\ &\qquad + \tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1^2 f(\vec{\mathbf{a}}) & D_1D_2 f(\vec{\mathbf{a}}) \\ D_1D_2 f(\vec{\mathbf{a}}) & D_2^2 f(\vec{\mathbf{a}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + O(\|\vec{\mathbf{h}}\|^3) \\ &= f(\vec{\mathbf{a}}) + f'(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + \tfrac{1}{2}\vec{\mathbf{h}}^T H_f(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + O(\|\vec{\mathbf{h}}\|^3). \end{aligned}$$

In het bijzonder geldt in een stationair punt

$$f(\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{h}}) = f(\vec{\mathbf{a}}) + \tfrac{1}{2}\vec{\mathbf{h}}^T H_f(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} + O(\|\vec{\mathbf{h}}\|^3)$$

en is $\vec{\mathbf{a}}$ een minimum als $\vec{\mathbf{h}}^T H_f(\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{h}} > 0$ voor alle $\vec{\mathbf{h}} \neq \vec{\mathbf{0}}$.

Opgave V7.2b

Bepaal de extrema van $f(x,y) = x^2 - x + 2y^2$ op $E = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 1\}$.

We bepalen eerst de afgeleides:

$$(D_1 f)(x,y) = 2x - 1, \qquad (D_2 f)(x,y) = 4y.$$

Oplossen $D_1 f = 0$ en $D_2 f = 0$ geeft $(x,y) = (\frac{1}{2}, 0)$. Er geldt

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix},$$

dus dit is een inwendig sterk minimum. We bekijken de rand $x^2+y^2 = 1$, met parametrisatie $(x,y) = (\cos t, \sin t)$. Bekijk

$$g(t) = f(\cos t, \sin t) = 1 - \cos t + \sin^2 t.$$

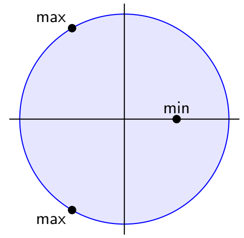
Oplossen $g'(t) = 0$ geeft $t = 0$, $t = \frac{\pi}{3}$, $t = \pi$ en $t = \frac{2\pi}{3}$.

Opgave V7.2b

Bepaal de extrema van $f(x,y) = x^2 - x + 2y^2$ op $E = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 1\}$.

Er is een sterk inwendig minimum in $(\frac{1}{2}, 0)$. We zoeken extrema van $g(t) = f(\cos t, \sin t) = 1 - \cos t + \sin^2 t$:

t	(x,y)	$f(x,y)$	
0	$(1,0)$	0	min
$\frac{2\pi}{3}$	$(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$	$\frac{9}{4}$	max
π	$(-1,0)$	2	min
$\frac{4\pi}{3}$	$(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3})$	$\frac{9}{4}$	max



De punten $(-\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\sqrt{3})$ zijn absolute randmaxima. Merk op $f(\frac{1}{2}, 0) = -1/4$, dus dit is het absolute minimum. Er geldt $f(x,0) = x^2 - x$, dus $(\pm 1, 0)$ zijn geen minima van f.

Opgave V7.1

a) Zadelpunten in $(0,3)$, $(3,0)$ en $(3,3)$. Sterk lokaal minimum in $(2,2)$.

b) Zadelpunt in $(0,0)$.

c) Sterk lokaal minimum in $(0,2/3)$. Zadelpunten in $(\pm 1,1)$. Voor $|x| < 1$ is (x,x^2) een maximum, voor $|x| > 1$ een minimum.

d) Zadelpunt in $(-1/2,1/2)$.

e) Zadelpunt in $(0,0)$, minimum in $(\pm 1,\pm 1)$.

f) Zadelpunten in $(0,0)$, $(1,\pm 1)$ en $(-1,\pm 1)$, maximum in $(0,\pm 1/\sqrt{2})$.

Opgave V7.2

a) Zie vorige week.

b) Inwendig minimum in $(1/2,0)$. Absoluut randmaximum in $(-1/2,\pm\sqrt{3}/2)$.

c) Zadelpunt in $(0,0)$, inwendig minimum in $(0,\pm 1)$, inwendig maximum in $(\pm 1,0)$. Potentiële randmaxima $(\pm 2,0)$ en minima: $(0,\pm 2)$ zijn geen extrema van f.

d) Inwendig minimum in $(0,0)$. Inwendige maxima in $\left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}},\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ en $\left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}},-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$. Zadelpunten in $(0,\pm 1)$ en $(\pm 1,0)$. En dan nog de rand.

e) Zadelpunt in $(0,0)$, $(1,1)$, inwendig minimum in $(2/3,10/27)$. Absoluut randmaximum in $(1,0)$ en $(0,1)$, absoluut randminimum in $(-1,0)$