Analyse: van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}^n$ practicum 7

Ross: 21.3, 21.4

Syllabus: 1.9, V1.1ch, V1.2bc, 1.20

Gerrit Oomens
G.Oomens@uva.nl

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica
Universiteit van Amsterdam

22 maart 2013

Functies op $\mathbb{R}^n$

Zij $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Dan is

- $\lim_{\vec{\mathbf{x}}\to\vec{\mathbf{a}}} f(\vec{\mathbf{x}}) = L$ als voor alle $\epsilon > 0$ er een $\delta > 0$ is zodat
$$\|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{a}}\| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(\vec{\mathbf{x}}) - L| < \epsilon;$$
- f continu in $\vec{\mathbf{x}}_0$ als
$$\lim_{\vec{\mathbf{x}}\to\vec{\mathbf{x}}_0} f(\vec{\mathbf{x}}) = f(\vec{\mathbf{x}}_0).$$

Propositie 1.19

Zij $f : \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{\mathbf{0}}\}$ continu met $f(r\vec{\mathbf{x}}) = r^\alpha f(\vec{\mathbf{x}})$ voor $r > 0$. Dan is $\lim_{\vec{\mathbf{x}}\to\vec{\mathbf{0}}} f(\vec{\mathbf{x}}) = \vec{\mathbf{0}}$ als $\alpha > 0$ en bestaat deze limiet niet als $\alpha \le 0$.

Opgave V1.1g

Bestaat $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{x^2+y^2}$?

Herinner: $\sin z = z + R_3(z)$, dus
$$\frac{\sin xy}{x^2+y^2} = \frac{xy}{x^2+y^2} + \frac{R_3(xy)}{x^2+y^2}.$$

Nu is $|R_3(z)| \le C|z|^3$, dus
$$\left|\frac{R_3(xy)}{x^2+y^2}\right| \le \frac{C|xy|^3}{x^2+y^2} = \frac{C|xy|^3}{\|\vec{\mathbf{x}}\|^2} \le C\frac{\|\vec{\mathbf{x}}\|^6}{\|\vec{\mathbf{x}}\|^2} = C\|\vec{\mathbf{x}}\|^4 \to 0,$$
want $|x| \le \sqrt{x^2+y^2} = \|\vec{\mathbf{x}}\|$.

Aangezien $\lim_{\vec{\mathbf{x}}\to\vec{\mathbf{0}}} \frac{xy}{x^2+y^2}$ niet bestaat ($y = x$ geeft $1/2$, maar $y = 0$ geeft 0), bestaat dus ook de limiet $\lim_{\vec{\mathbf{x}}\to\vec{\mathbf{0}}} \frac{\sin xy}{x^2+y^2}$ niet.

Opgave V1.2a

Toon aan dat $f(x,y) = \log(1+|xy|)/|x|$ als $x \neq 0$ met $f(0,y) = |y|$ continu is.

De functie
$$f(x,y) = \frac{\log(1+|xy|)}{|x|}$$
is continu als op $\{x \neq 0\}$ als samenstelling van continue functies. We moeten aantonen dat
$$\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} \frac{\log(1+|xy|)}{|x|} = |y_0|$$
voor alle $y_0 \in \mathbb{R}$. Merk op $\log(1+z) = z - R_2(z)$, dus
$$\frac{\log(1+|xy|)}{|x|} = \frac{|xy|}{|x|} + \frac{R_2(|xy|)}{|x|} = |y| + \frac{R_2(|xy|)}{|x|}.$$
Er geldt $|y| \to |y_0|$ als $(x,y) \to (0,y_0)$ en
$$\frac{|R_2(|xy|)|}{|x|} \le \frac{C|xy|^2}{|x|} = C|x||y|^2 \to 0.$$

Opgave V1.2c

Toon aan dat $f(x,y) = \frac{e^{x^2-y^2}-1}{x^2-y^2}$ als $x^2 \neq y^2$ met $f(x,\pm x) = 1$ continu is.

We moeten bewijzen dat

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,\pm x_0)} \frac{e^{x^2-y^2}-1}{x^2-y^2} = 1.$$

Er geldt $e^z = 1 + z + R_2(z)$, dus

$$\frac{e^{x^2-y^2}-1}{x^2-y^2} = \frac{x^2-y^2+R_2(x^2-y^2)}{x^2-y^2} = 1 + \frac{R_2(x^2-y^2)}{x^2-y^2},$$

waar

$$\left|\frac{R_2(x^2-y^2)}{x^2-y^2}\right| \leq \frac{C|x^2-y^2|^2}{|x^2-y^2|} = C|x^2-y^2| \to 0$$

als $(x,y) \to (x_0, \pm x_0)$.