Analyse: van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}^n$ practicum 8

V2.1bcd, V2.4bdf (deel i), V2.5 (deel i t/m iii)

Gerrit Oomens
G.Oomens@uva.nl

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica
Universiteit van Amsterdam

5 april 2013

Opgave V2.5

Bekijk de volgende functies met $f(\vec{\mathbf{0}}) = 0$. (i) Is f continu in 0?
(ii) Bestaan de partiële afgeleiden in $\vec{\mathbf{0}}$? (iii) Voor welke $\vec{\mathbf{u}}$ bestaat $(D_{\vec{\mathbf{u}}})f(\vec{\mathbf{0}})$?

a) $\dfrac{x^3}{x^2+y^2}$ b) $\dfrac{x^4}{x^2+y^2}$ c) $\dfrac{x^2y}{x^2+y^4}$ d) $\dfrac{x^3}{x^2+y^4}$

(i) a en b zijn homogeen met positieve graad, dus continu. Ook:

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^4}\right| \leq \frac{x^2|y|}{x^2} = |y| \to 0, \qquad \left|\frac{x^3}{x^2+y^4}\right| \leq \frac{|x|^3}{x^2} = |x| \to 0.$$

(ii) We hebben

$$(D_1)f(\vec{\mathbf{0}}) = \lim_{h\to 0} \tfrac{f(0+h,0)}{h} = \quad \text{a) } 1 \quad \text{b) } 0 \quad \text{c) } 0 \quad \text{d) } 1$$

$$(D_2)f(\vec{\mathbf{0}}) = \lim_{h\to 0} \tfrac{f(0,0+h)}{h} = \quad \text{a) } 0 \quad \text{b) } 0 \quad \text{c) } 0 \quad \text{d) } 0$$

(iii) Er geldt $(D_{\vec{\mathbf{u}}}f)(\vec{\mathbf{0}}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h\vec{\mathbf{u}})}{h}$ met $\vec{\mathbf{u}} = (x,y)$. Dit geeft

a) $\dfrac{x^3}{x^2+y^2}$ b) 0 c) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{h^3x^2y}{h^3x^2+h^5y^4} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2y}{x^2+h^2y^4} = y$ d) x.