UNIVERSITEIT VAN AMSTERDAM

Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica

# Tentamen

## Analyse: van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}^n$

### Bachelor wiskunde jaar 1

Deeltoets
Datum: maandag 20 juni 2016
Tijd: 13.00-16.00

Aantal pagina's: 2 (inclusief voorblad)
Aantal vragen: 7
Maximum aantal te behalen punten: 55
Bij iedere vraag staat vermeld hoeveel punten hij waard is.

---

**VOORDAT U BEGINT**

- Controleer of uw versie van het tentamen compleet is.
- Schrijf **uw naam en studentnummer** en indien van toepassing **versienummer** op **elk vel papier** dat u inlevert en **nummer de pagina's**.
- Uw **mobiele telefoon** moet uit staan en in uw jas of tas zitten. **Uw jas en tas** moeten op de grond liggen.
- **Toegestane hulpmiddelen**: kladpapier. Overige hulpmiddelen zijn niet toegestaan.

---

**HUISHOUDELIJKE MEDEDELINGEN**

- De eerste 30 minuten mag u de zaal niet verlaten, ook niet voor het bezoeken van het toilet.
- 15 minuten voor het eind wordt u gewaarschuwd dat het inlevertijdstip nadert.
- Vul na afloop van het tentamen het evaluatieformulier in, indien van toepassing.
- U bent verplicht zich op verzoek van de examinator (of diens vertegenwoordiger) te kunnen legitimeren met een bewijs van inschrijving en een geldig legitimatiebewijs.
- Tijdens het tentamen is toiletbezoek niet toegestaan, tenzij de surveillant hier toestemming voor geeft.

---

**Succes!**

Leg altijd je antwoorden uit. Bij vragen die beginnen met "bepaal" of "geef" is een formeel bewijs niet noodzakelijk, tenzij anders vermeld.

**Opgave 1.** Zij $S$ een metrische ruimte en $F \subseteq S$ compact.

(a) We noemen een verzameling $E \subseteq S$ *begrensd* als er een $s \in S$ en $R > 0$ bestaat zodat $E \subseteq B(s, R)$. Bewijs dat $F$ begrensd is. [4 pt]
(b) Bewijs dat $F$ gesloten is. [6 pt]

**Opgave 2.** Zij $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ een functie.

(a) Geef de definities van de totale afgeleide $f'(\vec{a})$ en de partiële afgeleides $D_j f(\vec{a})$. Leg uit wat het verband is tussen de twee soorten afgeleides. [4 pt]
(b) Geef een voorbeeld van een functie waarvan de partiële afgeleides in elk punt bestaan, maar die niet overal differentieerbaar is. Bewijs dat dit inderdaad zo is. [6 pt]

**Opgave 3.** Bekijk de functie $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ met $f(0,0) = 0$ en

$$f(x,y) = \frac{x^2(\cos y - 1)}{x^2 + y^4}, \qquad \text{voor } (x,y) \neq (0,0).$$

(a) Bewijs dat $f$ continu is in $(0,0)$. [5 pt]
(b) Bepaal de richtingsafgeleiden van $f$ in $(0,0)$. [2 pt]
(c) Is $f$ differentieerbaar in $(0,0)$? Bewijs je antwoord. [3 pt]

**Opgave 4.** Bekijk

$$F(x) = \int_0^1 e^{-xy^2}\, \mathrm{d}y.$$

(a) Bewijs dat $F$ oneindig vaak continu differentieerbaar is. [3 pt]
(b) Gebruik de Taylorreeks van $e^z$ om de Taylorreeks van $F$ te bepalen. Laat zien dat deze in elke $x \in \mathbb{R}$ convergeert naar $F(x)$. [7 pt]

**Opgave 5.** Zij $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ een differentieerbare functie. Definieer $\psi(r,\theta) = \phi(r\cos\theta, r\sin\theta)$ voor $r > 0$ en $\theta \in [0, 2\pi)$. Gebruik de kettingregel om de partiële afgeleides van $\psi$ uit te drukken in die van $\phi$. [5 pt]

**Opgave 6.** Bekijk de functie $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x,y) = (x-1)\bigl(y - \tfrac{1}{2}\bigr)^4$$

op de driehoek $E$ met hoekpunten $(0,0)$ met $(0,1)$ en $(2,0)$.

(a) Bepaal de inwendige extrema van $f$. Geef van ieder extremum aan of het (i) een minimum of maximum is, (ii) sterk of zwak en (iii) absoluut of relatief. [5 pt]
(b) Herhaal dit voor de randextrema. Schets het gebied $E$ en de gevonden extrema. [5 pt]