

# Tentamen

## Analyse: van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}^n$

### Bachelor wiskunde jaar 1

Deeltoets

Datum: maandag 20 juni 2016

Tijd: 13.00-16.00

Aantal pagina's: 2 (inclusief voorblad)

Aantal vragen: 7

Maximum aantal te behalen punten: 55

Bij iedere vraag staat vermeld hoeveel punten hij waard is.

---

#### VOORDAT U BEGINT

- Controleer of uw versie van het tentamen compleet is.
- Schrijf **uw naam en studentnummer** en indien van toepassing **versienummer** op **elk vel papier** dat u inlevert en **nummer de pagina's**.
- Uw **mobiele telefoon** moet uit staan en in uw jas of tas zitten. **Uw jas en tas** moeten op de grond liggen.
- **Toegestane hulpmiddelen:** kladpapier. Overige hulpmiddelen zijn niet toegestaan.

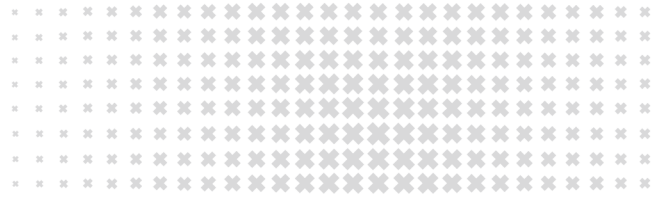
---

#### HUISHOUDELIJKE MEDEDELINGEN

- De eerste 30 minuten mag u de zaal niet verlaten, ook niet voor het bezoeken van het toilet.
- 15 minuten voor het eind wordt u gewaarschuwd dat het inlevertijdstip nadert.
- Vul na afloop van het tentamen het evaluatieformulier in, indien van toepassing.
- U bent verplicht zich op verzoek van de examinerator (of diens vertegenwoordiger) te kunnen legitimeren met een bewijs van inschrijving en een geldig legitimatiebewijs.
- Tijdens het tentamen is toiletbezoek niet toegestaan, tenzij de surveillant hier toestemming voor geeft.

---

**Succes!**



Leg altijd je antwoorden uit. Bij vragen die beginnen met “bepaal” of “geef” is een formeel bewijs niet noodzakelijk, tenzij anders vermeld.

**Opgave 1.** Zij  $S$  een metrische ruimte en  $F \subseteq S$  compact.

- (a) We noemen een verzameling  $E \subseteq S$  *begrensd* als er een  $s \in S$  en  $R > 0$  bestaat zodat  $E \subseteq B(s, R)$ . Bewijs dat  $F$  begrensd is. [4 pt]
- (b) Bewijs dat  $F$  gesloten is. [6 pt]

**Opgave 2.** Zij  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  een functie.

- (a) Geef de definities van de totale afgeleide  $f'(\vec{a})$  en de partiële afgeleides  $D_j f(\vec{a})$ . Leg uit wat het verband is tussen de twee soorten afgeleides. [4 pt]
- (b) Geef een voorbeeld van een functie waarvan de partiële afgeleides in elk punt bestaan, maar die niet overal differentieerbaar is. Bewijs dat dit inderdaad zo is. [6 pt]

**Opgave 3.** Bekijk de functie  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  met  $f(0, 0) = 0$  en

$$f(x, y) = \frac{x^2(\cos y - 1)}{x^2 + y^4}, \quad \text{voor } (x, y) \neq (0, 0).$$

- (a) Bewijs dat  $f$  continu is in  $(0, 0)$ . [5 pt]
- (b) Bepaal de richtingsafgeleiden van  $f$  in  $(0, 0)$ . [2 pt]
- (c) Is  $f$  differentieerbaar in  $(0, 0)$ ? Bewijs je antwoord. [3 pt]

**Opgave 4.** Bekijk

$$F(x) = \int_0^1 e^{-xy^2} dy.$$

- (a) Bewijs dat  $F$  oneindig vaak continu differentieerbaar is. [3 pt]
- (b) Gebruik de Taylorreeks van  $e^z$  om de Taylorreeks van  $F$  te bepalen. Laat zien dat deze in elke  $x \in \mathbb{R}$  convergeert naar  $F(x)$ . [7 pt]

**Opgave 5.** Zij  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  een differentieerbare functie. Definieer  $\psi(r, \theta) = \varphi(r \cos \theta, r \sin \theta)$  voor  $r > 0$  en  $\theta \in [0, 2\pi)$ . Gebruik de kettingregel om de partiële afgeleides van  $\psi$  uit te drukken in die van  $\varphi$ . [5 pt]

**Opgave 6.** Bekijk de functie  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  gegeven door

$$f(x, y) = (x - 1)\left(y - \frac{1}{2}\right)^4$$

op de driehoek  $E$  met hoekpunten  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$  en  $(2, 0)$ .

- (a) Bepaal de inwendige extrema van  $f$ . Geef van ieder extremum aan of het (i) een minimum of maximum is, (ii) sterk of zwak en (iii) absoluut of relatief. [5 pt]
- (b) Herhaal dit voor de randextrema. Schets het gebied  $E$  en de gevonden extrema. [5 pt]