Uitwerking Analyse deeltentamen 3

Opgave 1. Zie syllabus.

Opgave 2. We hebben

$$\begin{aligned}
\gamma_1'(t) &= -4\sin t \\
\gamma_2'(t) &= -2\cos t\sin t - 2\sin t\cos t = -4\sin t\cos t \\
\gamma_3'(t) &= 2\cos^2 t - 2\sin^2 t + 2.
\end{aligned}$$

Dan is

$$\gamma_3'(t)^2 = 4\cos^4 t + 4\sin^4 t + 4 - 8\cos^2 t\sin^2 t - 8\sin^2 t + 8\cos^2 t$$

en dus

$$\begin{aligned}
\Lambda(\gamma) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \gamma_2'(t)^2 + \gamma_3'(t)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{8\sin^2 t + 8\sin^2 t\cos^2 t + 4\cos^4 t + 4\sin^4 t + 4 + 8\cos^2 t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{12 + 4(\cos^2 t + \sin^2 t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{16}\,\mathrm{d}t = 8\pi.
\end{aligned}$$

Opgave 3.

a. Er geldt

$$\begin{aligned}
x\frac{\partial}{\partial x} &= x\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial}{\partial v}\right] = x\left[2xy\frac{\partial}{\partial u} + y^2\frac{\partial}{\partial v}\right] = 2u\frac{\partial}{\partial u} + v\frac{\partial}{\partial v}, \\
y\frac{\partial}{\partial y} &= y\left[\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial}{\partial v}\right] = y\left[x^2\frac{\partial}{\partial u} + 2xy\frac{\partial}{\partial v}\right] = u\frac{\partial}{\partial u} + 2v\frac{\partial}{\partial v}.
\end{aligned}$$

b. We hebben

$$\begin{aligned}
xy\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} &= x\frac{\partial}{\partial x} \circ y\frac{\partial}{\partial y} \\
&= \left(2u\frac{\partial}{\partial u} + v\frac{\partial}{\partial v}\right) \circ \left(u\frac{\partial}{\partial u} + 2v\frac{\partial}{\partial v}\right) \\
&= 2u\frac{\partial}{\partial u}\left[u\frac{\partial}{\partial u}\right] + uv\frac{\partial^2}{\partial v\partial u} + 4uv\frac{\partial^2}{\partial u\partial v} + v\frac{\partial}{\partial v}\left[2v\frac{\partial}{\partial v}\right] \\
&= 2u\frac{\partial}{\partial u} + 2u^2\frac{\partial^2}{\partial u^2} + 5uv\frac{\partial^2}{\partial u\partial v} + 2v\frac{\partial}{\partial v} + 2v^2\frac{\partial^2}{\partial v^2}.
\end{aligned}$$

Opgave 4.

a. We hebben

$$\begin{aligned}
D_1 f(x,y) &= (2xy - 2x^3y)e^{-x^2-y^2} = 2xy(1-x^2)e^{-x^2-y^2} \\
D_2 f(x,y) &= (x^2 - 2x^2y^2)e^{-x^2-y^2} = x^2(1-2y^2)e^{-x^2-y^2}
\end{aligned}$$

Oplossen $D_1 f = 0$ geeft $x = 0$ of $y = 0$ of $x = \pm 1$; $D_2 f = 0$ geeft $x = 0$ of $y = \pm 1/\sqrt{2}$. We hebben dus stationaire punten $(0, y)$ voor $y \in \mathbb{R}$ en de punten $(\pm 1, \pm 1/\sqrt{2})$ en $(\pm 1, \mp 1/\sqrt{2})$.

b. We hebben

$$g(t) = t^3x^2ye^{-t^2C}.$$

Er geldt

$$g'(t) = t^2x^2y(3 - 2Ct^2)e^{-t^2C}$$

en dit verandert niet van teken want $3 - 2Ct^2 < 3 - 3t^2 < 0$.

c. Op de rand wordt deze functie gegeven door $(C - y^2)ye^{-C^2}$. Afleiden en gelijkstellen aan 0 geeft $y = \pm\sqrt{C/3}$. De tweede afgeleide is $-6ye^{-C^2}$, dus $\sqrt{C/3}$ is een minimum op de rand, en $-\sqrt{C/3}$ een maximum. Merk nu op dat $t \mapsto f(tx, ty)$ stijgend is als $y > 0$, dus $\sqrt{C/3}$ kan geen minimum zijn. Evenzo kan $-\sqrt{C/3}$ geen maximum zijn omdat $t \mapsto f(tx, ty)$ dalend is als $y < 0$.

   Wel hebben we een zwak randminimum in $(0, \sqrt{C})$ en een zwak randmaximum in $(0, -\sqrt{C})$.

d. Het is eenvoudig in te zien dat $(0, y)$ een maximum is als $y < 0$ en een minimum als $y > 0$. Het punt $(0, 0)$ is een zadelpunt. Merk nu op dat

$$f(\pm1, \pm1/\sqrt{2}) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-3/2}, \qquad f(\pm1, \mp1/\sqrt{2}) = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-3/2}.$$

   Omdat de functie een minimum en maximum moet aannemen op de compacte verzamelingen $\{x^2+y^2 \leq C\}$ en dit niet op de rand gebeurt, volgt dat deze punten globale minima (negatieve functiewaarde) en maxima (positieve functiewaarde) zijn.