Lineaire afbeeldingen en normen

$\mathbb{R}^k$ $\mathbb{R}^\ell$ eindig-dim. → continu !?

- Zij V, W genormeerde vectorruimten

$$L \text{ "=" } \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & \\ & \ddots & \\ & & a_{k\ell} \end{bmatrix} \qquad \|L\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\ell} a_{ij}^2} \; ?$$

- De operatornorm:

$$\|L\|_{op} := \sup_{x\in V\setminus\{0\}} \frac{\|Lx\|_W}{\|x\|_V} = \sup_{x\neq 0} \left\| L\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| = \sup_{\|x\|=1} \|Lx\| = \sup_{x\in S^{n-1}} \|Lx\| < \infty$$

norm 1

→ compact → $L(S^{n-1})$ begrensd

- Dit is een norm op de ruimte $\mathrm{Lin}(V, W)$:
  - $\|L\| = 0 \Leftrightarrow L = 0$ → $\forall x \; \frac{\|Lx\|}{\|x\|} = 0 \to \|Lx\| = 0 \to Lx = 0$ ✓
  - $\|\lambda L\| = |\lambda|\|L\|$ voor $\lambda \in \mathbb{R}$ ✓
  - $\|K + L\| \le \|K\| + \|L\|$ $\quad \sup \|(L+K)x\| \le \sup(\|Lx\| + \|Kx\|) \le \sup\|Lx\| + \sup\|Kx\|$ ✓

Eigenschappen van de operatornorm

- Zij V, W genormeerde vectorruimten en $L: V \to W$ een lineaire afbeelding.
- We definiëren de operatornorm

$$\|L\| := \sup_{x\in V\setminus\{0\}} \frac{\|Lx\|}{\|x\|}$$

Voor $x \in V$ geldt $\frac{\|Lx\|}{\|x\|} \le \|L\| \to \boxed{\|Lx\| \le \|L\| \cdot \|x\|}$

$V \xrightarrow{L} W \xrightarrow{K} U$

- Zij $K: W \to U$ een lineaire afbeelding.

$\|K(Lx)\| \le \|K\| \, \|Lx\| \le \|K\| \, \|L\| \, \|x\|$

$$\to \quad \|KL\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|KLx\|}{\|x\|} \le \|K\| \, \|L\|$$