9 Kansrekening

Een *toevalsexperiment* is een experiment waarvan de uitkomst van het toeval afhangt. Een eenvoudig voorbeeld is het gooien van een dobbelsteen. In dit geval zijn er zes uitkomsten, die alleen even waarschijnlijk zijn. De kunnen nu spreken over de *kans* op een uitkomst: de proportie het aantal keren dat de uitkomst zou optreden in een zeer lange reeks van herhalingen. Als we bijvoorbeeld 600 keer met een dobbelsteen gooien, dan verwachten we ongeveer $600/6 = 100$ enen. Als we N keer gooien, verwachten we $N/6$ enen. De kans op een één is dan gelijk aan $1/6$. We schrijven $P(\text{één}) = 1/6$ (de P komt van "probability", het engelse woord voor kans).

Opgave 9.1. Naast de uitkomsten $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, kunnen we ook aan andere *gebeurtenissen* een kans toekennen. Geef de volgende kansen voor een dobbelsteen:

a. $P(\text{even uitkomst})$

b. $P(\text{minder dan vijf})$

Opgave 9.2. Een ander voorbeeld is het gooien met een munt.

a. Wat zijn de uitkomsten? Wat is de kans op iedere uitkomst?

b. Stel nu dat we twee munten gooien. Geef de vier mogelijke uitkomsten. Wat is de kans op iedere uitkomst?

We hebben hier te maken met *onafhankelijke* gebeurtenissen: de twee munten hebben geen invloed op elkaar. Als A en B onafhankelijke gebeurtenissen zijn, geldt de productregel $P(A \text{ en } B) = P(A) \cdot P(B)$.

c. Ga na dat dit geldt voor de munten, met bijvoorbeeld $A =$"eerste munt is kop" en $B =$"tweede munt is kop".

d. Zijn de gebeurtenissen "eerste munt is kop" en "beide munten zijn kop" onafhankelijk? Ga na dat de productregel wel of niet geldt.

Opgave 9.3. We gooien nu met twee dobbelstelen en noteren de uitkomsten met D_1 en D_2. De uitkomsten zijn onafhankelijk van elkaar.

a. Bereken $P(D_1 = 1 \text{ en } D_2 = 4)$.

b. Hoeveel uitkomsten heeft dit experiment in totaal? Wat is de kans op een uitkomst?

c. Hoeveel uitkomsten zijn er waarbij geldt $D_1 + D_2 = 3$?

d. Bereken $P(D_1 + D_2 = 3)$.

e. Leg uit dat de gebeurtenissen "$D_1 = 1$" en "$D_1 + D_2 = 3$" niet onafhankelijk zijn. Bereken $P(D_1 = 1) \cdot P(D_1 + D_2 = 3)$ en $P(D_1 = 1 \text{ en } D_1 + D_2 = 3)$.

Om kansen wiskundig te formaliseren, maken we gebruik van *kansmodellen*. Deze bestaan uit drie dingen:

- De *uitkomstenruimte* is de verzameling van alle mogelijke uitkomsten.
- Een *gebeurtenis* is een verzameling mogelijke uitkomsten, oftewel een deelverzameling van de uitkomstenruimte.
- Een *kansmaat* P is een toewijzing van kansen aan gebeurtenissen.

Voor de dobbelsteen is de uitkomstenruimte gelijk aan $\{1,2,3,4,5,6\}$. Merk op dat verzamelingen meestal worden aangegeven met accolades en daartussen de elementen. Deze elementen hoeven geen getallen te zijn, maar kunnen ook paren getallen of andere object zijn ($\{\text{kop}, \text{munt}\}$ is ook een prima uitkomstenruimte). Gebeurtenissen zijn bijvoorbeeld $\{2,4,6\}$ ("even uitkomst") of $\{1,2,3,4\}$ ("minder dan vijf"). De kansmaat voldoet aan

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \tfrac{1}{6}.$$

Opgave 9.4. Bekijk de situatie van Opgave 9.3.

a. Hoeveel elementen heeft de uitkomstenruimte? Hoe zien deze elementen eruit? Schrijf er een aantal op.

b. Geef de deelverzamelingen die corresponderen met de gebeurtenissen "$D_1 = 1$", "$D_1 + D_2 = 2$" en "$D_1 = 1$ en $D_1 + D_2 = 2$". Wat is het verband tussen de eerste twee en de laatste?

We hebben gezien dat we bij onafhankelijkheid $P(A \text{ en } B) = P(A) \cdot P(B)$ hebben. Hoe zit het met $P(A \text{ of } B)$? We nemen weer de dobbelsteen als voorbeeld:

$$P(3 \text{ of } 4) = P(\{3,4\}) = \tfrac{2}{6} = P(3) + P(4),$$
$$P(\text{"even uitkomst" of } 5) = P(\{2,4,5,6\}) = \tfrac{4}{6} = P(\text{"even uitkomst"}) + P(5).$$

We zien dat er in deze gevallen een somregel geldt. Maar dit gaat niet altijd op:

$$P(\text{"even uitkomst" of "kleiner dan 3"}) = P(\{1,2,4,6\}) = \tfrac{4}{6}$$
$$P(\text{"even uitkomst"}) + P(\text{"kleiner dan 3"}) = P(\{2,4,6\}) + P(\{1,2\}) = \tfrac{3}{6} + \tfrac{2}{6} = \tfrac{5}{6}.$$

Het probleem hier is dat de gebeurtenissen beide de uitkomst 2 bevatten, dus deze wordt in de tweede regel dubbel geteld. In het algemeen geldt dus $P(A \text{ of } B) = P(A) + P(B)$ als A en B geen uitkomsten gemeenschappelijk hebben, dus als ze *elkaar uitsluitende* of *disjuncte* gebeurtenissen zijn.

Opgave 9.5. In de situatie van Opgave 9.3 bekijken we de gebeurtenissen A : "$D_1 = 1$", B : "$D_1 = D_2$", C : "$D_1 = 1, D_2 = 3$" en D : "$D_1 + D_2 = 3$".

a. Bepaal $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$ en $P(D)$. *Hint voor* B: tel bij hoeveel van de 36 mogelijke uitkomsten de gebeurtenis optreedt.

b. Geef voor elk van de paren (A,B), (A,C), (A,D), (B,C), (B,D) en (C,D) aan of ze elkaar uitsluiten, onafhankelijk zijn, of geen van beiden.

c. Bepaal voor ieder van deze paren (X,Y) de kansen $P(X \text{ en } Y)$ en $P(X \text{ of } Y)$.

d. Doe hetzelfde voor (A,E) met E : "$D_2 = 5$".

In deze opgave gebruiken we de volgende regel: als alle uitkomsten even waarschijnlijk zijn en we de kans op een gebeurtenis A willen berekenen, dan geldt

$$P(A) = \frac{\text{aantal uitkomsten waarbij } A \text{ optreedt}}{\text{totaal aantal uitkomsten}}.$$

Opgave 9.6. We gooien vier keer met een munt en noteren de vier uitkomsten.

a. Hoe ziet een uitkomst van dit experiment er uit? Geef een voorbeeld.

b. Hoeveel mogelijke uitkomsten zijn er?

c. Wat is de kans op een van deze uitkomsten?

d. Hoeveel uitkomsten zijn er met precies één keer kop?

e. Wat is de kans om precies één keer kop te gooien?

f. Wat is de kans om precies 2 keer kop te gooien?

g. Stel nu dat we met n munten gooien voor een zeker getal n. Beantwoord de bovenstaande vragen voor deze situatie (vraag f is lastig).

Ten slotte nog een handige regel voor het rekenen met kansen: voor een gebeurtenis A geldt

$$P(A \text{ treedt niet op}) = 1 - P(A).$$

Bijvoorbeeld voor het gooien met een dobbelsteen

$$P(\text{niet } 1) = P(\{1, 2, 3, 4, 5\}) = \frac{5}{6} = 1 - P(1).$$

Opgave 9.7. Bekijk een populatie mensen die met kans 2/3 blauwe ogen hebben.

a. We kiezen een willekeurig persoon. Wat is de kans dat deze persoon geen blauwe ogen heeft?

We kiezen nu willekeurig zestien personen uit de populatie.

b. Wat is de kans dat ze allemaal blauwe ogen hebben?

c. Wat is de kans dat ze geen van allen blauwe ogen hebben?

d. Wat is de kans dat minstens 1 van hen blauwe ogen heeft?

Opgaven

Opgave 9.8. We kiezen willekeurig kikkers uit een emmer. De volgende tabel geeft de kans om een kikker van een zekere kleur te vinden:

Kleur	Kans
groen	2/7
blauw	1/7
geel	1/7
oranje	?

a. Wat is de kans dat de kikker oranje is?

b. Wat is de kans dat de kikker groen of blauw is?

Stel nu dat we het experiment twee keer uitvoeren: we pakken een willekeurig een kikker, leggen die terug, en pakken er nog één.

c. Wat is de kans dat we twee keer een groene kikker pakken?

d. Wat is de kans dat we geen groene kikker pakken?

e. Wat is de kans dat we minstens één groene kikker pakken?

Opgave 9.9. Geef voor elk van onderstaande experimenten de uitkomstenruimte en de kans op iedere uitkomst.

a. We rollen met twee dobbelstenen en noteren beide aantallen ogen.

b. We rollen met twee dobbelstenen en noteren de som van het aantal ogen.

c. We kiezen willekeurig een persoon en noteren de dag en maand van hun geboortedatum.

d. We nemen een munt en blijven gooien totdat we kop krijgen. We noteren het aantal keren dat we hebben gegooid.

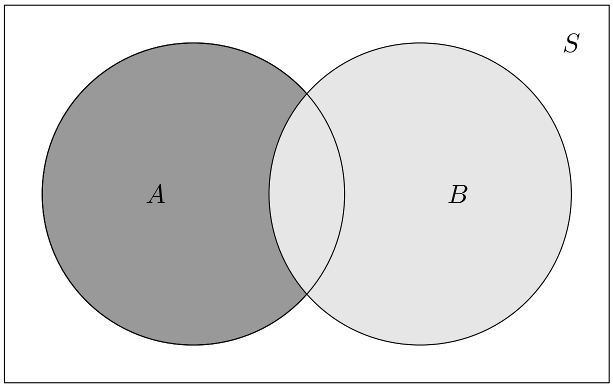
Opgave 9.10. Bekijk een verzwaarde munt die met kans $\frac{1}{4}$ kop geeft. We gooien 10 keer met deze munt. Wat is de kans dat we minstens 1 keer kop krijgen?

Opgave* 9.11. Bekijk een uitkomstenruimte S met twee gebeurtenissen A and B. Als voorbeeld nemen we $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ (denk aan een zeven-zijdige dobbelsteen) met $A = \{1, 2, 5\}$ ("we gooien 1, 2 of 5") and $B = \{5, 6, 7\}$ ("we gooien minstens 5").

a. De gebeurtenissen A en B zijn deelverzamelingen van S. Welke deelverzameling S correspondeert met de gebeurtenis "A of B" (dus "we gooien 1, 2 of 5" of "we gooien minstens 5")? Welke met"A en B"?

b. Welke deelverzameling correspondeert met de gebeurtenis "A treedt niet op"?

c. We kunnen deze verzamelingen voorstellen met behulp van een *Venn diagram*:



Hoe wordt de gebeurtenis "A of B" weergegeven in dit diagram? En "A en B"?

d. Wat stelt het donkere gearceerde gebied voor? Welke verzameling is dit in ons voorbeeld?