Zomercursus Wiskunde A

Week 1, les 2

Gerrit Oomens
G.Oomens@uva.nl

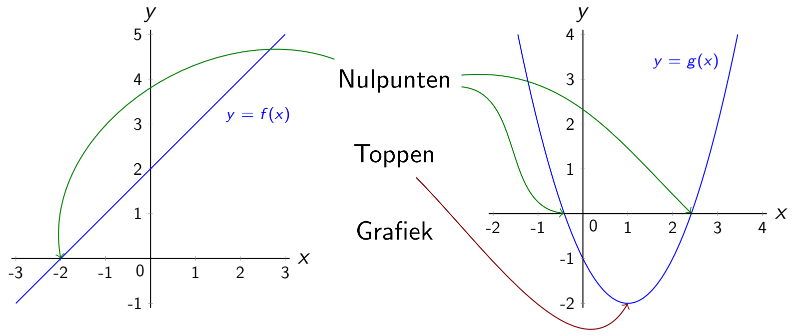
Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica
Universiteit van Amsterdam

12 juli 2011

Functies en grafieken

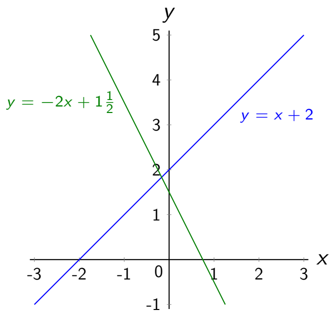
$$x \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow f(x)$$

$f(x) = x + 2$ $\qquad$ $g(x) = x^2 - 2x - 1$



Lineaire functies

Een *lineaire functie* is van de vorm $f(x) = ax + b$, waarbij a en b willekeurige getallen zijn. De grafiek is een rechte lijn.

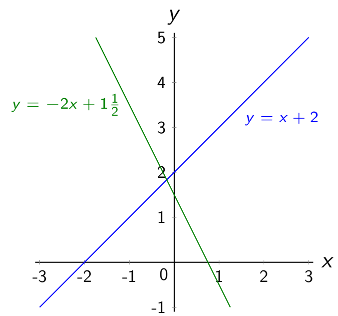


- De parameter b geeft een verschuiving. De grafiek gaat altijd door het punt $(0, b)$.
- De parameter a geeft de *helling* van de lijn: als je op de grafiek 1 naar rechts gaat, ga je a omhoog.

Lineaire functies en vergelijkingen

De nulpunten van $f(x) = x + 2$ vinden we door de *lineaire vergelijking* $0 = x + 2$ op te lossen. Dit geeft $x = -2$. Zo ook

$$0 = -2x + 1\tfrac{1}{2}$$
$$2x = 1\tfrac{1}{2}$$
$$x = 1\tfrac{1}{2}/2 = \tfrac{3}{4}.$$



Het snijpunt van f en $g(x) = -2x + 1\frac{1}{2}$ vinden we door op te lossen $f(x) = g(x)$.

$$x + 2 = -2x + 1\tfrac{1}{2}$$
$$3x + 2 = 1\tfrac{1}{2}$$
$$3x = -\tfrac{1}{2}$$
$$x = -\tfrac{1}{6}.$$

Dus de x-coördinaat van het snijpunt is $-\frac{1}{6}$. De y-coördinaat is

$$f(-\tfrac{1}{6}) = -\tfrac{1}{6} + 2 = 1\tfrac{5}{6} = g(-\tfrac{1}{6}).$$

Lineaire functies en vergelijkingen

Dit kunnen we ook zonder getallen in te vullen. Wat is het nulpunt van $ax + b$?

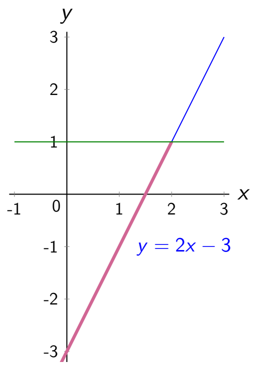
$$\begin{aligned} 0 &= ax + b \\ -ax &= b \\ x &= -\frac{b}{a}. \end{aligned}$$

Let op: hiervoor moet gelden $a \neq 0$, anders is er geen nulpunt (horizontale lijn).

Lineaire ongelijkheden

Een lineaire ongelijkheid als $2x - 3 < 1$ is op te lossen net als een vergelijking:

$$2x - 3 < 1 \quad \Rightarrow \quad 2x < 4 \quad \Rightarrow \quad x < 2.$$



Maar, bij delen door of vermenigvuldigen met een negatief getal, klapt het teken om: er geldt $2 < 3$, maar $-2 > -3$. Zo ook

$$\begin{aligned} x + 2 > 2x - 1 \quad &\Rightarrow \quad -x > -3 \\ &\Rightarrow \quad x < 3. \end{aligned}$$

Lijn door een punt

Probleem

Vind de lineaire functie met helling 2 waarvan de grafiek door het punt $(-1, 2)$ gaat.

Een lineaire functie ziet er uit als

$$f(x) = ax + b,$$

waarbij a de helling is, dus $a = 2$:

$$f(x) = 2x + b.$$

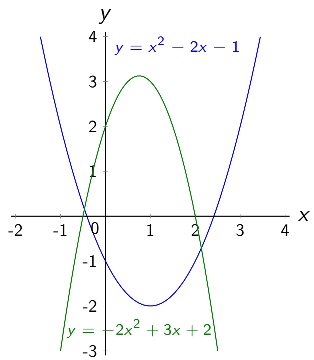
Verder moet gelden $f(-1) = 2$:

$$2 = 2 \cdot (-1) + b \quad \Rightarrow \quad 2 = -2 + b \quad \Rightarrow \quad 4 = b.$$

De gevraagde functie is dus $f(x) = 2x + 4$.

Kwadratische functies

Een *kwadratische functie* is van de vorm $f(x) = ax^2 + bx + c$. De grafiek is een parabool.



- De parameter c geeft een verschuiving. De grafiek gaat altijd door het punt $(0, c)$.
- $a > 0$ geeft een dalparabool $\cup$, $a < 0$ een bergparabool $\cap$.

Kwadratische vergelijkingen

Speciale gevallen:

- $x^2 = 4$ heeft als oplossingen $x = 2$ en $x = -2$.
- $x^2 - x = 0$. We halen een x "buiten haakjes":

  $$x(x-1) = x^2 - x.$$

  De vergelijking wordt $x(x-1) = 0$, en een product is 0 precies als 1 van de factoren 0 is. Dit geeft $x = 0$ en

  $$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

  als oplossingen.
- $x^2 + 5x + 6$. Truc: zoek 2 getallen met product 6 en som 5; dit zijn 2 en 3. Dan is

  $$(x+2)(x+3) = x^2 + 2x + 3x + 6 = x^2 + 5x + 6.$$

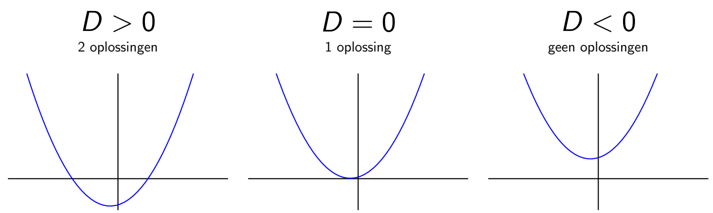
  Nu heeft $(x+2)(x+3) = 0$ als oplossingen $x = -2$ en $x = -3$.

Kwadratische vergelijkingen (algemeen)

De vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ heeft als oplossingen

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{en} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

waarbij $D = b^2 - 4ac$ de *discriminant* wordt genoemd.
De discriminant bepaalt het aantal oplossingen:



Kwadratische vergelijkingen (algemeen)

De vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ heeft als oplossingen

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{en} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

waarbij $D = b^2 - 4ac$ de *discriminant* wordt genoemd.

Nulpunten van blauwe grafiek: $x^2 - 2x - 1 = 0$.

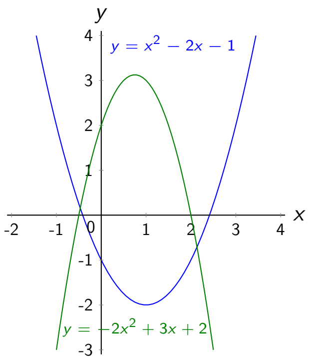
$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 4 + 4 = 8,$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{8} = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Zo ook $-2x^2 + 3x + 2 = 0$:

$$D = 3^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 2 = 9 + 16 = 25.$$

$$x_1 = \frac{-3+5}{-4} = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{-3-5}{-4} = 2.$$



Snijpunten van polynomen

De vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ heeft als oplossingen

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{en} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

We lossen op

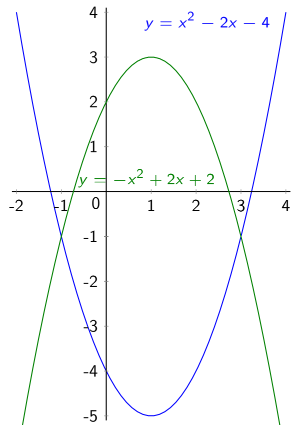
$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 4 &= -x^2 + 2x + 2. \\ 2x^2 - 4x - 6 &= 0 && \text{(alles naar links)} \\ x^2 - 2x - 3 &= 0 && \text{(delen door 2)} \\ (x+1)(x-3) &= 0 && \text{(som/product)} \end{aligned}$$

Dus $x_1 = -1$ en $x_2 = 3$ zijn oplossingen, met

$$y_1 = 1^2 - 2 \cdot (-1) - 4 = -1$$

$$y_2 = 3^2 - 2 \cdot 3 - 4 = -1.$$

Snijpunten: $(-1, -1)$ en $(3, -1)$.



Breuken met letters

Er geldt $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$ als $c \neq 0$. Hiermee kun je breuken vereenvoudigen:

$$\frac{2x^2 - x}{3x} = \frac{x(2x-1)}{3x} = \frac{2x-1}{3} \qquad \text{als } x \neq 0.$$

Breuken optellen kan bij gelijke noemers, volgens $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$.
Ongelijke noemers? Eerst gelijknamig maken:

$$\frac{1}{6x} + \frac{2}{3x} = \frac{1}{6x} + \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 3x} = \frac{1}{6x} + \frac{4}{6x} = \frac{5}{6x}.$$

Vermenigvuldigen is makkelijk volgens $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$. Ten slotte:
delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde.
Oftewel, er geldt $\frac{a}{b} \Big/ \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$. Bijvoorbeeld:

$$\frac{5}{x-1} \Big/ \frac{x}{3x-3} = \frac{5}{x-1} \cdot \frac{3(x-1)}{x} = \frac{15(x-1)}{x(x-1)} = \frac{15}{x} \qquad \text{als } x \neq 1.$$

Vergelijkingen met breuken

Een breuk is 0 alleen als de teller 0 is (de noemer mag niet 0 zijn).

$$\frac{3x-2}{4-x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x = 2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2}{3}.$$

Verder:

$$\frac{x-2}{x+1} = 4 \quad \Rightarrow \quad x - 2 = 4(x+1) \quad \Rightarrow \quad x - 2 = 4x + 4$$
$$\Rightarrow \quad -3x = 6 \quad \Rightarrow \quad x = -2.$$

Vergelijkingen met breuken

Een breuk is 0 alleen als de teller 0 is (de noemer mag niet 0 zijn).

$$\frac{3x-2}{4-x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x = 2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2}{3}.$$

Ten slotte:

$$\frac{x+1}{x+2} = 3 + \frac{3}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{x+1}{x+2} = \frac{3x}{x} + \frac{3}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{x+1}{x+2} = \frac{3x+3}{x}.$$

Nu kruiselings vermenigvuldigen:

$$\begin{aligned}
x(x+1) &= (x+2)(3x+3) & \\
x^2 + x &= 3x^2 + 6x + 3x + 6 & \text{(haakjes uitwerken)} \\
0 &= 2x^2 + 8x + 6 & \text{(alles naar rechts)} \\
0 &= x^2 + 4x + 3 & \text{(delen door 2)} \\
0 &= (x+1)(x+3). & \text{(som/product)}
\end{aligned}$$

Dus $x = -1$ en $x = -3$ zijn de oplossingen.

Opgaven

- Lineaire functies: 9.12 ab, 9.13 ab, 16.7 bce, 9.17 bc.
- Kwdratische functies: 10.2 ae, 10.22 ab, 10.25 abc, extra.
- Breuken: 6.4 abc, 9.22 ace.
- Oefenen met haakjes uitwerken: opgaven op pagina 38.

Antwoorden van de opgaven staan achterin, uitwerkingen van de extra opgaven op http://www.bliggy.net/cursusA.html.