10 Oplossingen: tellen

Opgave 10.1.

a. Ieder stuk fruit is nu een apart object, dus er zijn 7! mogelijkheden (7 voor plek 1, 6 voor plek 2, etcetera).

b. De appels mogen nu verwisseld worden, dus bij het antwoord uit a tellen we ze dubbel. Dit geeft 7!/2 mogelijkheden.

c. Hier mogen ook de sinaasappels verwisseld worden. Dit kan op 5! manieren. Dus er zijn $\frac{7!}{2 \cdot 5!}$ manieren ($= \binom{7}{2}$).

d. Ze zijn allemaal verschillend, dus voor fruit 1 zijn er zeven mogelijkheden en voor fruit 2 dan nog 6. Totaal is dus $7 \cdot 6 = 42$. Iedere mogelijkheid is even waarschijnlijk.

e. Nu zijn er vier mogelijkheden: (sinaasappel, sinaasappel), (sinaasappel, appel), (appel, sinaasappel), (appel, appel). Ze zijn niet even waarschijnlijk: (sinaasappel, sinaasappel) is het meest waarschijnlijk.

f. We willen de regel $P(A) = \frac{\text{relevant}}{\text{totaal}}$ gebruiken. Hiervoor is het noodzakelijk dat alle uitkomsten even waarschijnlijk zijn, dus we moeten vraag d gebruiken. Het aantal mogelijkheden met twee sinaasappels (genummerd) is $5 \cdot 4$ (5 sinaasappels om uit te kiezen voor de eerste, 4 voor de tweede). De kans is dus $\frac{5 \cdot 4}{42} = \frac{10}{21}$.

Opgave 10.2.

a. $\left(\frac{3}{4}\right)^7$

b. De kans dat 1 iemand geen neus heeft is $1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$. De kans dat niemand een neus heeft is dus $\left(\frac{1}{4}\right)^7$.

c. Er geldt $P(\text{minstens } 1) = 1 - P(\text{geen})$ (immers, het tegenovergestelde van "geen" is "minstens 1"). Dus de gevraagde kans is $1 - \left(\frac{1}{4}\right)^7$.

d. Dit is de uitkomst $NNGGGGG$ (N voor neus, G voor geen neus). De kans is $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{4^7}$.

e. We moeten nu de net berekende kans vermenigvuldigen met het aantal uitkomsten met twee N. Dit zijn er $\frac{7!}{2! \cdot 5!} = \binom{7}{2} = 21$. De gevraagde kans is dus $21 \cdot \frac{9}{4^7}$.

f. Dit is de kans dat 1 of 0 een neus hebben. De kans op 0 hebben we berekend in b, de kans op 1 is $\binom{7}{1} \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^6 = 7 \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^6$ (de kans op een uitkomst met 1 neus erin is $\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^6$ en er zijn er $\binom{7}{1} = 7$ van dit soort rijtjes). De gevraagde kans is dus

$$\left(\frac{1}{4}\right)^7 + 7 \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^6.$$

Opgave 10.3.

a. Voor ieder lampje zijn er twee mogelijkheden. Ze zijn allemaal onafhankelijk, dus het totaal is $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$.

b. Dit is het aantal rijtjes van de vorm AUAUU (twee A's), dus het aantal manieren om 2 A's en 3 U's te ordenen: $\frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$.

c. Dit zijn er $\frac{5!}{k!\cdot(n-k)!} = \binom{5}{k}$.

d. Er komt 32 uit deze som. Immers, we tellen het aantal toesten met 0 lampjes aan, het aantal met 1 lampje, tot en met het aantal met 5 lampjes en tellen deze allemaal bij elkaar op. Dit geeft het totaal aantal mogelijkheden, en in a zagen we dat dit 32 is.

e. Nu zijn er 2^n mogelijkheden. In $\binom{n}{k}$ hiervan zijn er k lampjes aan. Er geldt dus $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$.

Opgave 10.4.

a. $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$

b. We kunnen de drie eenden op $3 \cdot 2 \cdot 1$ ordenen. De kans is dus $\frac{3\cdot 2}{8\cdot 7\cdot 6} = \frac{1}{8\cdot 7}$.

c. Er zijn drie mogelijke ordeningen: GGX, GXG of XGG. Voor elke ordening hebben we $3 \cdot 2 = 6$ mogelijkheden om de twee groene eendjes te kiezen en 5 (wit + paars) voor de andere. Dus in totaal zijn er $3 \cdot 6 \cdot 5 = 90$ mogelijkheden.

d. Ook hier zijn er 3 mogelijke ordeningen: GXX, XGX en XXG. Nu zijn er $3 \cdot 5 \cdot 4 = 60$ mogelijkheden per ordening (3 mogelijke groene eendjes, $5 \cdot 4$ andere). Het totaal aantal mogelijkheden is dus $3 \cdot 60 = 180$. De gevraagde kans is $\frac{180}{336} = \frac{15}{28}$.

Opgave 10.5.

a. $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 26 = 6760000$.

b. Voor de cijfers hebben we $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$ mogelijkheden. Voor de letters vallen er 3 af, dus zijn er $26 \cdot 26 - 3$ mogelijkheden. Het totaal is dus $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot (26 \cdot 26 - 3) = 6057000$.

c. Er waren dus maar 20 letters, dus $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot (20 \cdot 20 - 3) = 3573000$ mogelijkheden. Dit is een toename van 70%.

Opgave 10.6.

a. $n = 20$, $p = \frac{1}{4}$

b. We verwachten gemiddeld een kwart goed, dus $20 \cdot \frac{1}{4} = 5$.

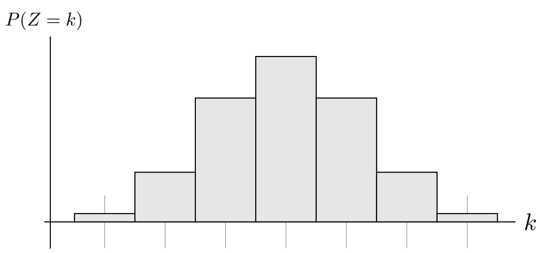
c. $P(X = 5) = \binom{20}{5} \left(\frac{1}{4}\right)^5 \left(\frac{3}{4}\right)^{15}$.

Opgave 10.7.

a. $P(X = 0) \approx 0.08$, $P(X \geq 5) \approx 0.02$, $P(Y = 0) \approx 0$, $P(Y \geq 5) \approx 0.42$.

b. Y heeft $p = 0.7$. De kans op veel successen (bijv. 5 of meer) is hier een stuk groter, dus de kans per succes zal ook groter zijn.

c. Met kans $\frac{1}{2}$ is hij symmetrisch: de kans op 2 successen is gelijk aan die op 4. Immers, de kans op 4 successen is de kans op 2 mislukkingen, en de kans op mislukken is ook $\frac{1}{2}$. Dus:



Opgave 10.8.

a. Het totaal aantal mogelijkheden is $6 \cdot 5 = 30$. Het aantal mogelijkheden met twee cavia's is 2. De kans is dus $\frac{2}{30} = \frac{1}{15}$.

b. Het aantal mogelijkheden met een olifant en een cavia is $2 \cdot 2 = 4$ (CO of OC en twee mogelijke cavia's). De kans is dus $\frac{4}{30} = \frac{2}{15}$.

c. De kans dat we niet twee cavia's pakken is $1 - \frac{1}{15} = \frac{14}{15}$. De kans dat we dit vier keer doen is dus $\left(\frac{14}{15}\right)^4$.

d. Dit is een binomiale verdeling met $n = 4$ en $p = \frac{1}{15}$ (we voeren 4 keer een experiment met succeskans $\frac{1}{15}$ uit). De gevraagde kans is dus $\binom{4}{1}\left(\frac{1}{15}\right)^1\left(\frac{14}{15}\right)^3 = 4 \cdot \frac{1}{15} \cdot \left(\frac{14}{15}\right)^3$.

Opgave 10.9.

a. De coëfficiënt $\binom{10}{7}$ telt het aantal manieren op 7 blauwe ballen en 3 groene ballen te ordenen. $\binom{10}{3}$ telt het aantal manieren om 3 blauwe en 7 groene ballen te ordenen. Dit is natuurlijk hetzelfde.

b. Er geldt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$
$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot \big(n-(n-k)\big)!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Opgave 10.10.

a. $\frac{6!}{3! \cdot 3!}$ (zes ballen totaal, maar de volgorde van de 3 groene en de 3 blauwe maakt niet uit)

b. We hebben in totaal 8 ballen, te ordenen op 8! manieren, maar de 3 groene ballen mogen op 3! manieren verwisseld worden, de 3 blauwe ook op 3! manieren en de 2 gele op 2! manieren. Dit geeft $\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = 560$ manierne.

c. $\frac{n!}{k! \cdot l! \cdot m!}$.

Opgave 10.11. De kans p geeft precies de ratio van verwachte successen aan. Dus bij n experimenten verwachten we gemiddeld p successen: $EX = np$.