5 Oplossing extra opgaven: afgeleiden

Opgave 5.1.

a. $f'(x) = (3x^2 - 5)(1 + \sqrt{x}) + (x^3 - 5x + 1)\frac{1}{2\sqrt{x}}$

b. We bepalen eerst de afgeleide van $(x+1)^5 = u^5$ met $u = x + 1$. Er geldt $[u^5]' = 5u^4$ en $u' = 1$, dus $\left[(x+1)^5\right]' = 5u^4 \cdot 1 = 5(x+1)^4$. Dan de productregel:

$$g'(x) = 5(x+1)^4\sqrt{x} + (x+1)^5\frac{1}{2\sqrt{x}} = (x+1)^4\left(5 + \frac{x+1}{2\sqrt{x}}\right)$$

.

c. We bepalen eerst de afgeleide van $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{u}$ met $u = x^2 - 1$. Er geldt $[\sqrt{u}]' = \frac{1}{2\sqrt{u}}$ en $u' = 2x$, dus $\left[\sqrt{x^2-1}\right]' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot 2x = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$. Dit geeft

$$h'(x) = 1 \cdot \sqrt{x^2-1} + (x+5) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}.$$

d. Met de kettingregel vinden we $\left[(x-2)^3\right]' = 3(x-2)^2 \cdot 1 = 3(x-2)^2$. Verder is de afgeleide van $x^2 + \frac{5}{x} = x^2 + 5x^{-1}$ gelijk aan $2x - 5x^{-2}$, dus $i'(x) = (2x - 5x^{-2})(x-2)^3 + (x^2 + 5x^{-1}) \cdot 3(x-2)^2$.

e. Met de kettingregel vinden we $\left[\sqrt{x+2}\right]' = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} \cdot 1 = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$. We vinden

$$j'(x) = 2x\sqrt{x+2} + x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+2}} = 2x\sqrt{x+2} + \frac{x^2}{2\sqrt{x+2}}.$$

f. We hebben hier zowel de quotiëntregel als de productregel nodig. De productregel hebben we al in onderdeel e gebruikt om de afgeleide van de teller te vinden. Dit geeft

$$\begin{aligned} k'(x) &= \frac{(x+1)\left(2x\sqrt{x+2} + \frac{x^2}{2\sqrt{x+2}}\right) - x^2\sqrt{x+2} \cdot 1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{2x(x+1)\sqrt{x+2} + \frac{x^2(x+1)}{2\sqrt{x+2}} - x^2\sqrt{x+2}}{(x+1)^2}. \end{aligned}$$

g. We schrijven $\ell(x) = (3-4x)^{-5} = u^{-5}$ met $u = 3 - 4x$. Er geldt $\ell'(u) = -5u^{-6}$ en $u' = -4$, dus $\ell'(x) = -5u^{-6} \cdot -4 = 20(3-4x)^{-6} = \frac{20}{(3-4x)^6}$.

Opgave 5.2.

a. We hebben $f'(x) = 3x^2 - 12$ en $f''(x) = 6x$. De vergelijking $3x^2 - 12 = 0$ geeft $x^2 = 4$, dus $x = \pm 2$. Verder is $f''(2) = 12 > 0$, dus dit is een minimum en $f''(-2) = -12 < 0$, dus dit is een maximum.

b. We hebben $g'(x) = 4x^3 - 4x$ en $g''(x) = 12x^2 - 4$. We lossen op $4x^3 - 4x = 0$:

$$4x(x^2-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \text{ of } x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \text{ of } x = \pm 1.$$

Invullen in de tweede afgeleide: $g''(0) = -4$ (maximum), $g''(1) = g''(-1) = 8$ (minima).

c. We hebben $h'(x) = 4x^3 - 12x$ en $h''(x) = 12x^2 - 12$. Afgeleide gelijkstellen aan 0:

$$4x(x^2 - 3) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \text{ of } x^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \text{ of } x = \pm\sqrt{3}.$$

We hebben $h''(0) = -12$ (minimum), $h''(\sqrt{3}) = h''(-\sqrt{3}) = 36 - 12 = 24$ (maximum).

d. We hebben $j'(x) = 1 \cdot e^x + xe^x - e^x = xe^x$ en $j''(x) = e^x + xe^x$. De vergelijking $j'(x) = 0$ geeft $x = 0$ of $e^x = 0$. De laatste heeft geen oplossingen, dus we hebben 1 top in $x = 0$. Dit is een minimum, want $j''(0) = e^0 + 0 \cdot e^0 = 1 > 0$.

Opgave 5.3.

a. We vullen 0 in: $f(0) = 0$. Het snijpunt is dus $(0, 0)$.

b. We lossen op $x^3 + 5x^2 + 3x = 0$. Een x buiten haakjes halen geeft $x(x^2 + 5x + 3) = 0$, dus $x = 0$ of $x^2 + 5x + 3 = 0$. Voor deze vergelijking gebruiken we de *abc*-formule en vinden we

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 12}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

Omdat we straks willen schetsen is het handig om te weten waar deze ongeveer liggen. We hebben $\sqrt{13} \approx 3\frac{1}{2}$, dus

$$\frac{-5 - \sqrt{13}}{2} \approx \frac{-8\frac{1}{2}}{2} = -4\tfrac{1}{4}, \qquad \frac{-5 + \sqrt{13}}{2} = \frac{-1\frac{1}{2}}{2} = -\frac{3}{4}.$$

(De rekenmachine gebruiken kan natuurlijk ook.)

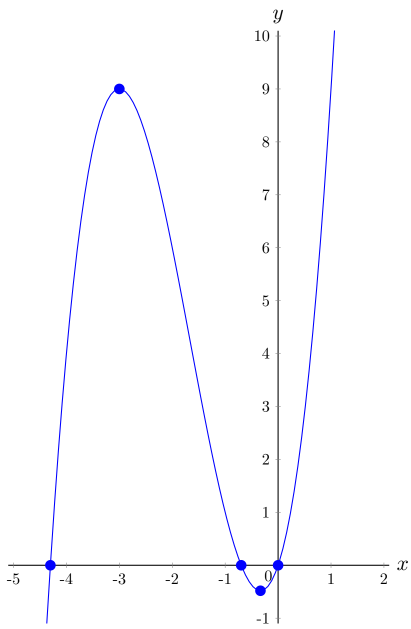
c. Er geldt $f'(x) = 3x^2 + 10x + 3$. Met de *abc*-formule vinden we

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-10 + \sqrt{100 - 36}}{6} = \frac{-10 + \sqrt{64}}{6} = \frac{-10 + 8}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3} \\ x_2 &= \frac{-10 - 8}{6} = \frac{-18}{6} = -3. \end{aligned}$$

De tweede afgeleide is $f''(x) = 6x + 10$, zodat $f''(-3) = -8$ en $f''(-1/3) = -2 + 10 = 8$. Dus in -3 is er een maximum en in $-1/3$ een minimum. Voor de schets bepalen we ook de y-coördinaten: $f(-3) = -27 + 45 - 9 = 9$ en

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{27} + \frac{5}{9} - 1 = \frac{-1}{27} + \frac{15}{27} - \frac{27}{27} = -\frac{13}{27}.$$

d. Teken eerst de punten die je kent: de toppen en nulpunten. Omdat je ook weet wat voor toppen het zijn, geeft dit al een redelijk beeld van hoe de functie eruit ziet. Het enige wat misschien nog niet duidelijk is, is wat er gebeurt links van het linker nulpunt en rechts van het meest rechtste nulpunt. Om hier een idee van te krijgen zou je grote positieve en negatieve waarden (bijvoorbeeld 100 en -100) voor x in kunnen vullen. In dit geval zie je dan dat voor x groot de functie heel groot wordt en voor x groot en negatief de functiewaarden ook groot en negatief worden.



y
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
x
-5
-4
-3
-2
-1
1
2