

## 6 Oplossingen extra opgaven: functieonderzoek

### Opgave 6.1.

- De functies  $x^4$ ,  $2$  en  $2^x$  zijn overal goedgedefinieerd, dus het domein van de som van deze functies is ook  $\mathbb{R}$ .
- De functie  $\lceil \log 5 \rceil A$  is alleen gedefinieerd als  $A > 0$ . Dus in dit geval moet er gelden:  $x - 3 > 0$ , oftewel  $x > 3$ . Dus het domein van  $y = \lceil \log 5 \rceil (x - 3)$  is  $x > 3$ .
- We kunnen alleen de wortel trekken uit een positief getal en uit  $0$ , dus een getal  $x$  zit in het domein van  $y = \sqrt{x - 3}$  als  $x - 3 \geq 0$ , oftewel als  $x \geq 3$ .
- De functie  $x - 2$  is overal goed gedefinieerd, en zo is de functie  $x^2 - 3x - 10$ , maar deze laatste is nu in de noemer van de functie  $y$ , we moeten er dus voor zorgen dat  $x^2 - 3x - 10$  niet  $0$  wordt, we kunnen namelijk niet door nul delen. We stellen dus  $x^2 - 3x - 10 = 0$ : we berekenen de discriminant  $D = (-3)^2 - 4 \cdot -10 = 9 + 40 = 49$ , dan met de ABC-formule vinden we dat

$$x_1 = \frac{3 + 7}{2} = 5 \quad \text{en} \quad x_2 = \frac{3 - 7}{2} = -2$$

Dus het domein van deze functie is  $x \neq 5$  en  $x \neq -2$

- We kunnen de logaritme alleen van positieve getallen nemen, dus in dit geval ook we moeten gaan kijken naar wanneer  $x^2 - 5x + 4 > 0$  is. We zien dat  $x^2 - 5x + 4$  een dalparabool is, want de coëfficiënt bij  $x^2$  is  $1$ , groter dan  $0$ . Dus  $x^2 - 5x + 4 > 0$  links en rechts van de nulpunten. Deze laatste gaan we berekenen door de discriminant te vinden:  $D = (-5)^2 - 4 \cdot 4 = 9$ , en dan de ABC-formule toepassen:

$$x_1 = \frac{5 + 3}{2} = 4 \quad \text{en} \quad x_2 = \frac{5 - 3}{2} = 1$$

Dus het domein van de functie  $y = {}^6\log(x^2 - 5x + 4)$  is  $x < 1$  en  $x > 4$ .

### Opgave 6.2. We bekijken $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$ .

- Elk van de functies  $x^3$ ,  $-3x^2$  en  $-9x$  is overal goedgedefinieerd, dus de functie  $f$  heeft als domein heel  $\mathbb{R}$ .
- We kunnen de functie  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$  herschrijven als  $f(x) = x(x^2 - 3x - 9)$  en dus is  $x = 0$  een nulpunt van  $f$ . Om het verder te herleiden gaan we de nulpunten vinden van de functie  $x^2 - 3x - 9$ . De discriminant van deze functie is  $D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -9 = 9 + 36 = 45$  en zijn nulpunten zijn:

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{45}}{2}$$

De nulpunten van de functie  $f$  zijn dus:  $0$ ,  $\frac{3+\sqrt{45}}{2}$  en  $\frac{3-\sqrt{45}}{2}$ .

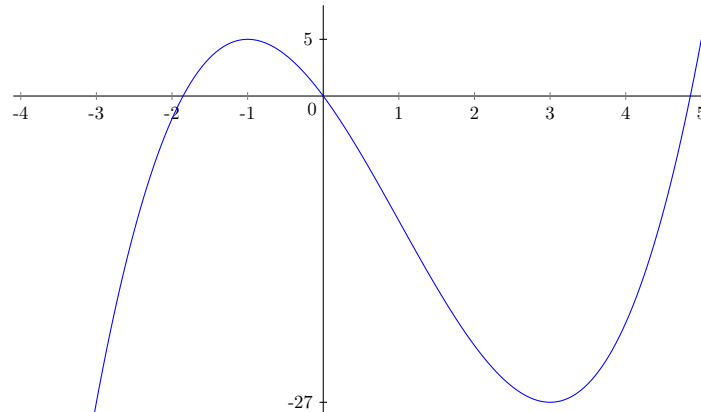
- Om de extrema van  $f$  te vinden, berekenen we de afgeleide en stellen we deze gelijk aan nul:  $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 0$ . Dit is een kwadratische vergelijking, dus we berekenen de discriminant van de functie  $3x^2 - 6x - 9$  en dan lossen we de vergelijking op met de ABC-formule. We krijgen  $D = (-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot -9 = 36 + 108 = 144$  en dit geeft

$$x_{3,4} = \frac{6 \pm \sqrt{144}}{2 \cdot 3} = \frac{6 \pm 12}{6}$$

Dus in  $x_3 = \frac{6+12}{6} = 3$  en  $x_4 = \frac{6-12}{6} = -1$  is de afgeleide van  $f$  gelijk aan nul. Om te onderzoeken of we te maken hebben met minima, maxima of buigpunten, berekenen we de

tweede afgeleide van onze functie:  $f''(x) = 6x - 6$ . Hierin  $x_3$  invullen geeft:  $f''(x_3) = 6 \cdot 3 - 6 = 12 > 0$ , dus  $f$  heeft een minimum in  $x = 3$ . De tweede afgeleide in het punt  $x_4$  is:  $f''(x_4) = 6 \cdot -1 - 6 = -12 < 0$ , dus  $g$  heeft een maximum in  $x = -1$ . De  $y$ -coördinaten van de toppen zijn  $f(-1) = 5$  en  $f(3) = -27$ .

- d. Hiermee kunnen de grafiek schetsen, waarbij we opmerken dat voor grote positieve waarden van  $x$  de functie  $g$  ook groot wordt en evenzo wordt  $g$  negatief en groot voor grote negatieve waarden van  $x$ :



- e. We zien nu ook dat  $f$  alle mogelijke waarden aanneemt, dus het bereik is  $\mathbb{R}$ .

**Opgave 6.3.** We bekijken  $g(x) = \frac{x^2 - 2x - 4}{x - 4}$ . We hebben een breuk, dus de noemer mag niet 0 zijn. De noemer is alleen 0 voor  $x = 4$ , dus het domein bestaat uit alle  $x \neq 4$ . Voor de nulpunten lossen we  $h(x) = 0$  op. Een breuk is alleen 0 als de teller 0 is, dus dit geeft  $x^2 - 2x - 4 = 0$ . De discriminant is  $D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -4 = 4 + 16 = 20$ . De nulpunten zijn dus

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{20}}{2}$$

We moeten nog controleren dat dit geen nulpunten zijn van de noemer  $x = 4$ . Hier is aan voldaan, want beide oplossingen zijn niet 4. Voor het vinden van de toppen bepalen we eerst de afgeleide met de quotiëntregel:

$$g'(x) = \frac{(x-4)(2x-2) - (x^2-2x-4) \cdot 1}{(x-4)^2} = \frac{2x^2 - 2x - 8x + 8 - x^2 + 2x + 4}{(x-4)^2} = \frac{x^2 - 8x + 12}{(x-4)^2}.$$

We lossen nu weer op  $g'(x) = 0$ , en dit is alleen zo als de teller gelijk is aan 0, dus we krijgen  $x^2 - 8x + 12 = 0$ . Hierop passen we de ABC-formule toe:

$$x_{3,4} = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 12}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2}.$$

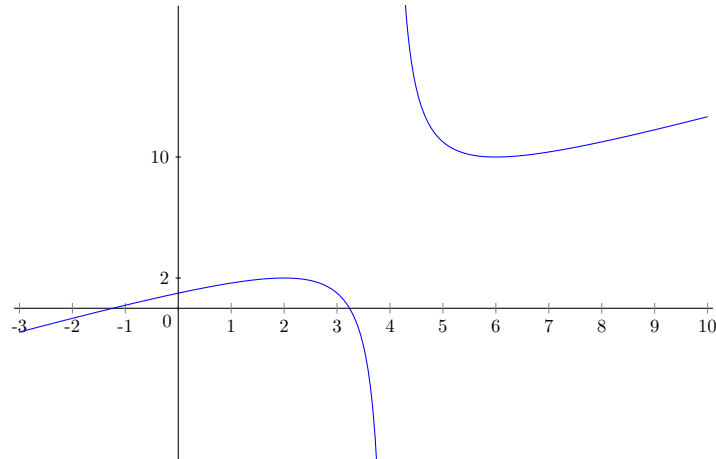
Dus in  $x_3 = 6$  en  $x_4 = 2$  is de afgeleide van  $g$  gelijk aan nul. We hebben de tweede afgeleide nodig om te bepalen of dit minima, maxima of buigpunten zijn. De tweede afgeleide is

$$g''(x) = \frac{(x-4)^2 \cdot (2x-8) - (x^2-8x+12) \cdot 2(x-4)}{((x-4)^2)^2} = \frac{(x-4) \cdot (2x-8) - (x^2-8x+12) \cdot 2}{(x-4)^3}$$

In de laatste stap hebben we de teller en de noemer beide door  $(x-4)$  gedeeld (merk op dat  $((x-4)^2)^2 = (x-4)^4$ ). We hebben nu

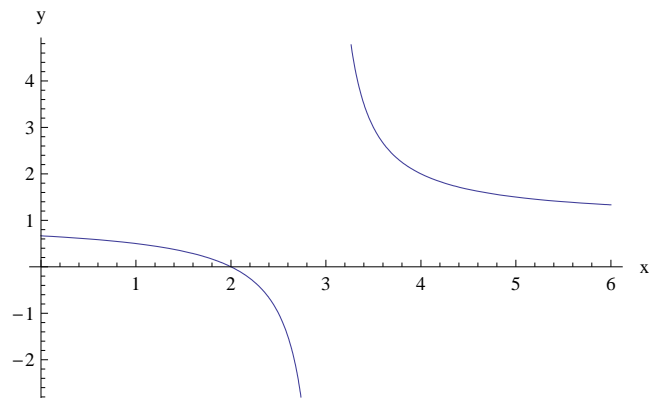
$$g''(x) = \frac{(2x^2 - 16x + 32) - (2x^2 - 16x + 24)}{(x-4)^3} = \frac{8}{(x-4)^3}$$

Hierin  $x_3$  invullen geeft:  $g''(x_3) = \frac{8}{6-4)^3} = \frac{8}{8} = 1 > 0$ , dus  $g$  heeft een minimum in  $x = 6$ . De tweede afgeleide in het punt  $x_4$  is:  $g''(x_4) = \frac{8}{(2-4)^3} = \frac{8}{-8} = -1 < 0$ , dus  $g$  heeft een maximum in  $x = 2$ . De  $y$ -coördinaten bij deze toppen zijn  $g(6) = \frac{6^2-2\cdot 6-4}{6-4} = \frac{20}{2} = 10$  en  $g(2) = \frac{2^2-2\cdot 2-4}{2-4} = \frac{-4}{-2} = 2$ . Hiermee kunnen we een schets maken, waarbij we letten op de asymptoot in  $x = 4$ :



We zien nu dat  $g$  alle waarden op de  $y$ -as aanneemt behalve die tussen de twee toppen. Dus het bereik bestaat uit  $y \geq 10$  en  $y \leq 2$ .

- Opgave 6.4.** a. De functies  $x-2$  en  $x-3$  zijn overal goedgedefinieerd, alleen de laatste functie staat in de noemer, dus deze mag niet nul worden, en omdat  $x-3=0$  als  $x=3$  is het domein van onze functie  $x \neq 3$ .
- b. Als we steeds grotere positieve waarden van  $x$  in  $h(x)$  vullen, komen we steeds dichtbij 1, maar we blijven altijd er net boven. Als we steeds grotere negatieve waarden van  $x$  in  $i(x)$  vullen, komen we weer steeds dichtbij 1, alleen deze keer blijven we er net onder. Als  $x$  van links dichtbij 3 komt, dus bijv.  $x = 2.9; x = 2.99; x = 2.999$  dan daalt de functie naar min oneindig en voor  $x$  die van rechts dichtbij 3 komt, dus bvb  $x = 3.1; x = 3.01; x = 3.001$  stijgt de functie naar oneindig.
- c. De functie  $h(x)$  heeft een verticale asymptoot in  $x = 3$  en een horizontale in  $y = 1$ .



- d. We zien dat  $h(x)$  alle waarden aanneemt behalve de horizontale asymptoot. Het bereik van  $h(x)$  is dus  $y \neq 1$ .