8 Oplossing extra opgaven: extra herhaling

Opgave 8.1.

a. $-\dfrac{6}{(x-2)^3}$

b. $\dfrac{26}{(x+3)^3}$

Opgave 8.2.

a. We stellen de twee functies aan elkaar gelijk en lossen het voor x op:

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) \quad &\Rightarrow \quad \sqrt{x} - x^2 = \tfrac{1}{2}x^2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x} = \tfrac{3}{2}x^2 \\ &\Rightarrow \quad 1 = \tfrac{3}{2}x^{\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow \quad x^{\frac{3}{2}} = \tfrac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad x = \left(\tfrac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}} = a \end{aligned}$$

b. We berekenen de afgeleide van f:

$$f'(x) \quad = \quad [\sqrt{x} - x^2]' \quad = \quad [x^{\frac{1}{2}} - x^2]' \quad = \quad \tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 2x \quad = \quad \frac{1}{2\sqrt{x}} - 2x$$

Nu deze afgeleide gelijk aan nul stellen:

$$\begin{aligned} 0 = \tfrac{1}{2\sqrt{x}} - 2x \quad &\Rightarrow \quad 0 = 1 - 2x \cdot 2\sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad 0 = 1 - 4x^{\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow \quad \tfrac{1}{4} = x^{\frac{3}{2}} \\ &\Rightarrow \quad x = \left(\tfrac{1}{4}\right)^{\frac{2}{3}} = 4^{-\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

De y-coördinaat van de top is dan:

$$f\left(4^{-\frac{2}{3}}\right) = \left(4^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(4^{-\frac{2}{3}}\right)^2 = 4^{-\frac{1}{3}} - 4^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} - \frac{1}{4\sqrt[3]{4}} = \frac{3}{4\sqrt[3]{4}} = 3 \cdot 4^{-\frac{4}{3}}$$

Dus f heeft een top in $\left(4^{-\frac{2}{3}}, 3 \cdot 4^{-\frac{4}{3}}\right)$.

c. De afstandsfunctie is $h(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{x} - \frac{3}{2}x^2$ en die kunnen we maximaliseren door de afgeleide $h'(x)$ te berekenen en dan gelijk aan nul stellen:

$$h'(x) \quad = \quad [f(x) - g(x)]' \quad = \quad f'(x) - g'(x) \quad = \quad \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 2x - x \quad = \quad \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 3x$$

en nu gelijk aan nul stellen:

$$\begin{aligned} 0 = \tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 3x \quad &\Rightarrow \quad 0 = \tfrac{1}{2\sqrt{x}} - \tfrac{3x \cdot 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad 0 = \tfrac{1 - 6x^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad 0 = 1 - 6x^{\frac{3}{2}} \\ &\Rightarrow \quad x^{\frac{3}{2}} = \tfrac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad x = \left(\tfrac{1}{6}\right)^{\frac{2}{3}} = 6^{-\frac{2}{3}} \end{aligned}$$