Uitwerkingen half oefententamen Wiskunde A

Opgave 1

(a) **Nulpunten.** We lossen op:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x = 0 \quad \Rightarrow \quad x(x^2 - 3x - 9) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \text{ of } x^2 - 3x - 9 = 0;$$

Met de *abc*-formule vinden we:

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -9}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{45}}{2}$$

Dus f heeft nulpunten in $x = 0$ en in $x = \frac{3 \pm \sqrt{45}}{2}$.

Toppen. We bepalen de afgeleide en stellen deze gelijk aan 0:

$$\begin{aligned} f'(x) = [x^3 - 3x^2 - 9x]' = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \quad &\Rightarrow \quad x^2 - 2x - 3 = 0 \\ \Rightarrow \quad (x-3)(x+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3 \text{ of } x = -1, \end{aligned}$$

De y-coördinaten van de toppen vinden we door de x-coördinaten in de functie f in te vullen:

$$f(-1) = (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 - 9 \cdot (-1) = 5 \qquad \text{en} \qquad f(3) = (3)^3 - 3 \cdot (3)^2 - 9 \cdot 3 = -27$$

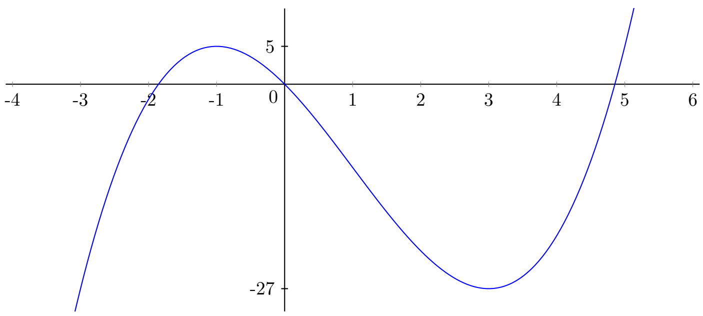
We hebben dus een top in $(-1, 5)$ en één in $(3, -27)$. Om de aard van deze toppen te vinden, berekenen we de tweede afgeleide:

$$f''(x) = [3x^2 - 6x - 9]' = 6x - 6$$

en we vullen in:

$$f''(-1) = 6 \cdot (-1) - 6 = -12 < 0 \qquad \text{en} \qquad f''(3) = 6 \cdot (3) - 6 = 12 > 0.$$

Dus de functie f heeft een maximum in $(-1, 5)$ en een minimum in $(3, -27)$.



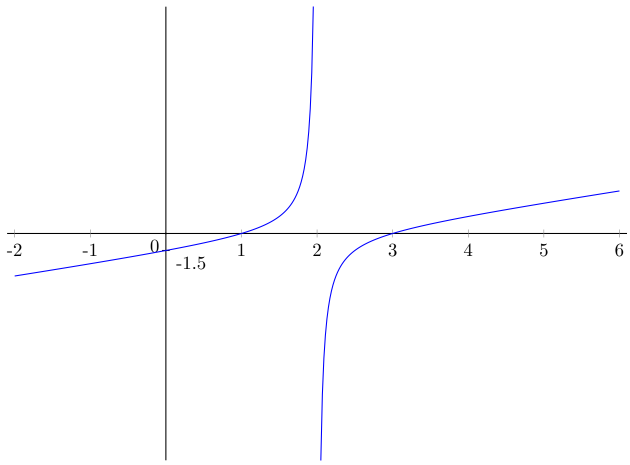
(b) We beginnen met het bepalen van het domein. De noemer mag niet gelijk zijn aan 0, dus het domein is alles behalve $x = 2$. Voor de nulpunten moet de teller gelijk zijn aan nul, $x^2 - 4x + 3 = 0$. We gebruiken de som-product methode en vinden

$$x^2 - 4x + 3 = (x-3)(x-1) = 0.$$

Dus de nulpunten zijn $x = 3$ en $x = 1$. We controleren nog wel of deze punten in ons domein liggen, maar het domein is $x \neq 2$, en daar liggen ze inderdaad in. Voor de toppen bepalen we de afgeleide met de quotiëntregel

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x-4)(x-2) - (x^2 - 4x + 3) \cdot 1}{(x-2)^2} \\ &= \frac{2x^2 - 4x - 4x + 8 - x^2 + 4x - 3}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 5}{(x-2)^2}. \end{aligned}$$

De afgeleide is gelijk aan nul als de teller gelijk is aan nul. We bepalen eerst de discriminant van de teller $D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16 - 20 = -4$. De discriminant is negatief, dus zijn er geen oplossingen. Dit betekent dat de grafiek geen toppen heeft. Om de grafiek te schetsen bepalen we eerst nog het snijpunt met de y-as, door 0 in te vullen in onze functie. $f(0) = \frac{0^2-4\cdot 0+3}{0-2} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$. De grafiek heeft een asymptoot bij $x = 2$ en nulpunten bij $x = 1$ en $x = 3$. Als we de asymptoot van links benaderen wordt $f(x)$ steeds groter (bereken bijvoorbeeld $f(1.99)$). Benaderen we de asymptoot van rechts wordt, dan wordt $f(x)$ steeds kleiner. Tot slot zien we dat voor heel grote waarde (> 100) de waarde van $f(x)$ steeds groter wordt en voor heel kleine waarden (< -100) wordt $f(x)$ steeds kleiner. We hebben nu genoeg informatie om de grafiek te schetsen.



We kunnen nu gemakkelijk aan de grafiek zien dat het bereik heel $\mathbb{R}$ is.

Opgave 2

(a)

$$x^4 - 3x^3 = 0$$

We halen eerst een factor x^3 buiten haakjes:

$$x^3(x-3) = 0.$$

We zien nu dat $x^3 = 0$ of $x - 3 = 0$. Dit geeft ons $x = 0$ of $x = 3$.

(b)

$$x^4 - 3x^3 < 0$$

In onderdeel a hebben we de gelijkheid opgelost. Om de ongelijkheid op te lossen moeten we het tekenverloop van $f(x) = x^4 - 3x^3$. We vinden het tekenverloop door een aantal waarden voor x in te vullen: $x = 1$ geeft als functiewaarde $1^4 - 3 \cdot 1^3 = -2 < 0$, dus tussen 0 en 3 is de functie negatief. Verder geeft $x = 4$ als waarde $4^4 - 3 \cdot 4^3 = 64 > 0$, dus rechts van 3 is de functie positief. Invullen van $x = -1$ geeft $(-1)^4 - 3 \cdot (-1)^3 = 4 > 0$, dus ook links van 0 is de functie positief. Hij is dus alleen kleiner dan 0 als x tussen de twee nulpunten in ligt, dus voor $0 < x < 3$.

(c) Logaritmes nemen geeft $1 - x = {}^2\log \frac{1}{2}$. We hebben ${}^2\log \frac{1}{2} = {}^2\log 2^{-1} = -1$, dus de vergelijking wordt $1 - x = -1$, oftewel $x = 2$.

(d) We vinden $x - 3 = 3^{\frac{1}{3/2}} = 3^{\frac{2}{3}}$, dus $x = 3^{\frac{2}{3}} + 3$.

(e) We halen een ${}^5\log x$ buiten haakjes:

$$\left({}^5\log x\right)(1+2x) = 0.$$

Dit geeft ${}^5\log x = 0$ of $1 + 2x = 0$. Het eerste geeft $x = 5^0 = 1$ en de tweede $x = -\frac{1}{2}$.

(f) We halen x naar rechts en halen hem buiten haakjes:

$$({}^3\log x)x - x = 0 \quad \Rightarrow \quad x({}^3\log x - 1) = 0.$$

Dit geeft $x = 0$ of ${}^3\log x - 1 = 0$, dus ${}^3\log x = 1$, oftewel $x = 3^1 = 3$.

(g) We passen de productregel toe:

$$\left[(x^3-1)\sqrt[3]{2-x^5}\right]' = 3x^2\sqrt[3]{2-x^5} + (x^3-1)\left[\sqrt[3]{2-x^5}\right]'. \qquad (1)$$

Nu moeten we de afgeleide van $f(x) = \sqrt[3]{2-x^5} = (2-x^5)^{\frac{1}{3}}$ berekenen. We hebben

$$\begin{aligned} f(u) &= u^{\frac{1}{3}} & u &= 2 - x^5 \\ f'(u) &= \tfrac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}} & u' &= -5x^4 \end{aligned}$$

$$f'(x) = \tfrac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}} \cdot (-5x^4) = -\tfrac{5}{3}(2-x^5)^{-\frac{2}{3}}x^4.$$

We vullen dit in in (1):

$$\left[(x^3-1)\sqrt[3]{2-x^5}\right]' = 3x^2\sqrt[3]{2-x^5} + (x^3-1)\left[-\tfrac{5}{3}(2-x^5)^{-\frac{2}{3}}\right].$$

Opgave 3

(a) We lossen op $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x\sqrt{x}}$. Vermenigvuldigen met $\sqrt{x}$ geeft $1 = \frac{1}{x}$. We vermenigvuldigen met x en vinden $x = 1$. De bijbehorende y-coördinaat is $f(1) = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$.

(b) De afgeleide van g is:

$$g'(x) = \left[\frac{1}{x\sqrt{x}}\right]' = \left[x^{-\frac{3}{2}}\right]' = -\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}} = -\frac{3}{2\sqrt{x^5}} \quad \left(= -\frac{3}{2x^2\sqrt{x}}\right).$$

Dus er geldt inderdaad $g'(\frac{3}{2}) = -\frac{3}{2}$.

(c) De lijn is van de vorm $y = -\frac{3}{2}x + b$ en moet door $(1,1)$ gaan, dus we vullen 1 in voor x en y. Dit geeft $1 = -\frac{3}{2} + b$, dus $b = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$. De gevraagde lijn is dus $y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$. Dit is de *raaklijn* aan g in $(1,1)$: