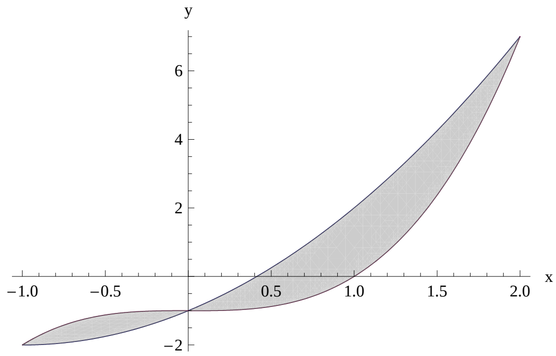
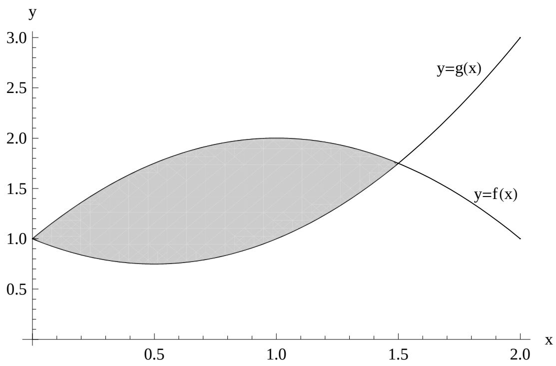
Extra oefenopgaven: functieonderzoek

Opgave 1

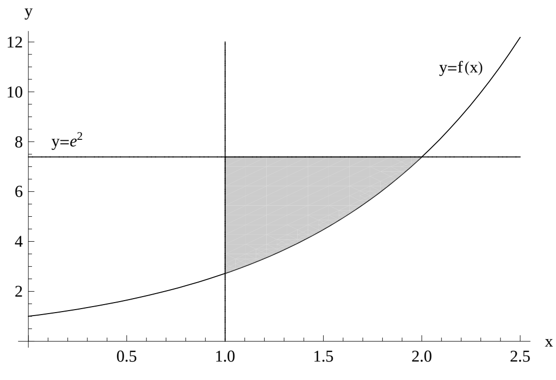
a. Bereken de oppervlakte tussen de grafieken van de functies $f(x) = x^2 + 2x - 1$ en $g(x) = x^3 - 1$, zie afbeelding:



b. Gegeven zijn de functies $f(x) = -x^2 + 2x + 1$ en $g(x) = x^2 - x + 1$, zie afbeelding. Bepaal exact de oppervlakte van het vlakdeel ingesloten door de grafieken van f en g.



c. Gegeven is de functie $f(x) = e^x$. Bepaal exact de oppervlakte ingesloten door de grafiek van f en de lijnen $x = 1$ en $y = e^2$, zie afbeelding:



Opgave 2

In deze opgave bestuderen we de functie $f(x) = e^{\cos(x)} - \frac{1}{\sqrt{e}}$ op het interval $[-2\pi, 2\pi]$.

a. Bereken de nulpunten van f.

b. Bereken de toppen van f en geef aan of het om minima of maxima gaat.

c. Teken de grafiek van de functie.

Opgave 3

In deze opgave bestuderen we de functie $f(x) = x^3 + 4x^2 - 5x$.

a. Bereken de nulpunten van f.

b. Bereken de x-waarden van de toppen van f en geef bij elk punt aan of het een minimum of maximum is.

c. Schets de grafiek van de functie.

d. Voor welke waarde van x gaat de raaklijn van f door $(x, f(x))$ en ook door het punt $(2, 0)$? Je mag gebruiken dat $x^3 + 2x^2 - 8 = (x - 2)(x^2 + 4x + 8)$.

Uitwerkingen extra oefenopgaven: functieonderzoek

Opgave 1

a. We willen de oppervlakte onder de grafiek van $f-g$ uitrekenen. We berekenen eerst de x-waarde van het snijpunt van f en g door de vergelijking

$$x^2+2x-1=x^3-1$$

op te lossen. Als we alles naar rechts halen krijgen we

$$x^3-x^2+2x=0$$

oftewel $x(x^2-x+2)=0$. Dit geeft de drie waarden $x=-1$, $x=0$ en $x=2$. We hebben

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0}(f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{0}\left(x^2+2x-x^3\right)\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{1}{3}x^3+x^2-\frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^{0}\\ &= 0-\left(-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{4}\right)=-\frac{5}{12}.\end{aligned}$$

Dit is negatief, de oppervlakte van het eerste stuk is $\frac{5}{12}$. De integraal over het tweede stuk is

$$\begin{aligned}\int_{0}^{2}(f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x &= \int_{0}^{2}\left(x^2+2x-x^3\right)\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{1}{3}x^3+x^2-\frac{1}{4}x^4\right]_{0}^{2}\\ &= \frac{1}{3}\cdot 8+4-\frac{1}{4}\cdot 16-0=\frac{8}{3}.\end{aligned}$$

De gevraagde oppervlakte is dus $\frac{5}{12}+\frac{8}{3}=\frac{37}{12}$.

b. Voordat we een integraal kunnen uitrekenen moeten we eerst berekenen wat de x waarde is van het rechtersnijpunt van f en g. We lossen $f(x)=g(x)$ op:

$$\begin{aligned}-x^2+2x+1&=x^2-x+1\\ -2x^2+3x&=0\\ x(-2x+3)&=0\\ x=0 \text{ of } x&=\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

We moeten dus $\int_0^{\frac{3}{2}}(f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x$ uitrekenen:

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\frac{3}{2}}(f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x &= \int_{0}^{\frac{3}{2}}\left(-2x^2+3x\right)\mathrm{d}x\\ &= \left[-\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_{0}^{\frac{3}{2}}\\ &= \frac{9}{8}.\end{aligned}$$

De gevraagde oppervlakte is dus $\frac{9}{8}$.

c. Het oplossen van $f(x)=g(x)$ geeft $x=2$. De oppervlakte is dus

$$\int_{1}^{2}\left(e^2-e^x\right)\mathrm{d}x=\left[e^2x-e^x\right]_1^2=2e^2-e^2-\left(e^2-e\right)=e.$$

Opgave 2

In deze opgave bestuderen we de functie $f(x) = e^{\cos(x)} - \frac{1}{\sqrt{e}}$ op het interval $[-2\pi, 2\pi]$.

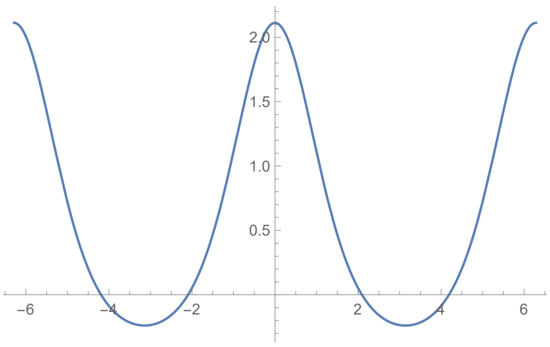
a. We hebben

$$\begin{aligned} f(x) = e^{\cos(x)} - \frac{1}{\sqrt{e}} &= 0 \\ e^{\cos(x)} &= \frac{1}{\sqrt{e}} = e^{-\frac{1}{2}} \\ \cos(x) &= -\frac{1}{2} \\ x &= \pm\frac{2}{3}\pi + k2\pi \text{ met } k \text{ geheel.} \end{aligned}$$

De oplossingen in $[-2\pi, 2\pi]$ zijn dus $x = \pm\frac{2}{3}\pi$ en $x = \pm\frac{4}{3}\pi$. De nulpunten zijn dus $(-\frac{4}{3}\pi, 0)$, $(-\frac{2}{3}\pi, 0)$, $(\frac{2}{3}\pi, 0)$ en $(\frac{4}{3}\pi, 0)$

b. Met de kettingregel zien we dat $f'(x) = \sin(x)e^{\cos(x)}$, dus $f(x) = 0$ als $\sin(x) = 0$ of als $e^{\cos(x)} = 0$. Een e-macht is nooit nul, dus de toppen liggen op $x = k\pi$ met k geheel. De y-waarden zijn $f(-2\pi) = f(0) = f(2\pi) = e - \frac{1}{\sqrt{e}}$ en $f(\pi) = f(-\pi) = \frac{1}{e} - \frac{1}{\sqrt{e}}$. We weten dat de cosinus maxima heeft bij $x = 0$ en $x = \pm 2\pi$ en minima bij $x = \pm\pi$. Omdat e^x een stijgende functie is betekent dit dat f maximaal is voor $x = 0$ en $x = \pm 2\pi$ en dat f minimaal is voor $x = \pm\pi$. Het is in dit geval dus niet nodig de tweede afgeleide uit te rekenen (maar dat zou ook werken).

c.



Opgave 3

In deze opgave bestuderen we de functie $f(x) = x^3 + 4x^2 - 5x$.

a. We hebben $f(x) = x(x^2 + 4x - 5) = x(x-1)(x+5)$ dus de nulpunten zijn $(0, 0)$, $(1, 0)$ en $(-5, 0)$.

b. De afgeleide is $f'(x) = 3x^2 + 8x - 5$ dus de abc-formule zegt dat $f'(x) = 0$ als

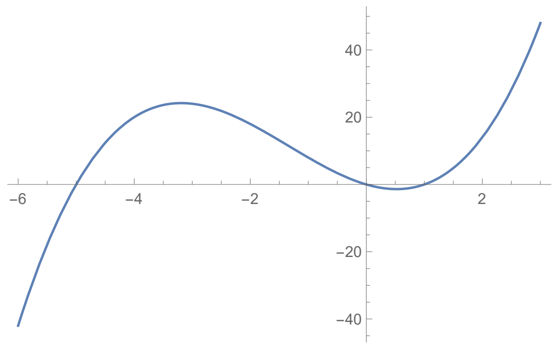
$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 3 \cdot -5}}{6} = \frac{-8 \pm \sqrt{124}}{6} = \frac{-4 \pm \sqrt{31}}{3}.$$

De tweede afgeleide is $f''(x) = 6x + 8$ dus

$$f''\left(\frac{-4 + \sqrt{31}}{3}\right) > 0 \text{ en } f''\left(\frac{-4 - \sqrt{31}}{3}\right) < 0.$$

Dus de punten zijn een minimum en maximum respectievelijk.

c.



d. De helling van een raaklijn moet gelijk zijn aan $f'(x) = 3x^2+8x-5$. Een raaklijn door $(x, f(x))$ is dus van de vorm

$$y = \left(3x^2 + 8x - 5\right) x + b$$

en hij moet voldoen aan

$$x^3 + 4x^2 - 5x = \left(3x^2 + 8x - 5\right) x + b$$

en hij moet door $(0, -32)$, dus $b = -32$. We moeten dus de vergelijking

$$x^3 + 4x^2 - 5x = \left(3x^2 + 8x - 5\right) x - 32$$

oplossen. Dit geeft

$$2x^3 + 4x^2 - 16 = 0,$$

oftewel $x^3 + 2x^2 - 8 = 0$. We hebben

$$x^3 + 2x^2 - 8 = (x - 2)(x^2 + 4x + 8)$$

dus $x = 2$ of $x^2+4x+8 = 0$. De tweede vergelijking heeft geen oplossingen, want de discriminant is $D = 16 - 4 \cdot 1 \cdot 8 < 0$. De gezochte waarde is dus $x = 2$.