# Extra oefenopgaven: goniometrie

## Opgave 1

Bereken:

a. $\cos(\frac{3}{4}\pi)$

b. $\sin(-\frac{1}{4}\pi)$

c. $\tan(\frac{4}{3}\pi)$

d. $\cos(-1\frac{1}{3}\pi)$

e. $\sin(5\frac{1}{4}\pi)$

f. $\tan(-\frac{16}{3}\pi)$

## Opgave 2

Los op:

a. $\cos(x) = -\frac{1}{2}$

b. $\tan(x) = 0$

c. $\cos(2x-1) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

d. $\sin(x-5) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

e. $\sin^2(x) = \frac{1}{2}$

f. $\cos^4(x) = \frac{1}{4}$

## Opgave 3

a. Los op: $\sin(2x) + \sqrt{2} \cdot \sin(x) = 0$.

b. Los op: $(\cos(x) + \sin(x))(\cos(x) - \sin(x)) = \frac{1}{2}$ voor $x$ in het interval $[0, 2\pi]$.

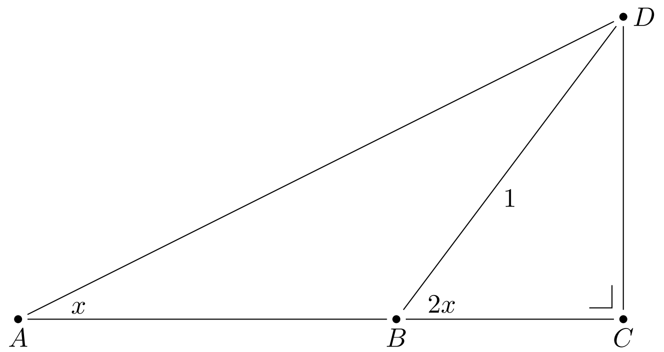
c. Los op: $\tan(x)\cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

d. Los op: $\sin^3(x) + \sin(x)\cos^2(x) = 1$ voor $x$ in het interval $[0, 2\pi]$.

e. Los op: $\cos^2(x) + \tan^2(x) = 1$.

## Opgave* 4[1]

In deze opgave gaan we de dubbele hoek-formule voor de cosinus bewijzen. Bestudeer de volgende figuur:




a. Overtuig jezelf ervan dat deze figuur kan worden getekend voor alle $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

b. Bereken de grootte van alle onbekende hoeken. Je mag gebruiken dat de som van alle hoeken in een driehoek altijd $\pi$ is en dat een gestrekte hoek ook grootte $\pi$ heeft.

c. Beredeneer dat $|AB| = 1$ en druk de lengtes van $BC$ en $CD$ uit in $x$.

d. Laat zien dat $|AD| = \sqrt{2 + 2\cos(2x)}$.

e. Gebruik nu de formule $\cos(x) = \frac{\text{aanliggende zijde}}{\text{schuine zijde}}$ om $\cos(x) = \frac{1+\cos(2x)}{\sqrt{2+2\cos(2x)}}$ te krijgen.

f. Bewijs tot slot dat $\cos(2x) = 1 - 2\cos(x)^2$.

[1] Opgaven met een ster zijn voor mensen die meer willen weten en horen niet bij de tentamenstof.

# Antwoorden extra opgaven: goniometrie

## Opgave 1

a. $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$

b. $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$

c. $\sqrt{3}$

d. $-\frac{1}{2}$

e. $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$

f. $-\sqrt{3}$

## Opgave 2

a. $x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$ of $x = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi$ met $k$ geheel.

b. $x = k\pi$ met $k$ geheel.

c. $x = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{12}\pi + k\pi$ met $k$ geheel.

d. $x = 5 + \frac{1}{4}\pi + 2k\pi$ of $x = 5 + \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$ met $k$ geheel.

e. $x = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}k\pi$ met $k$ geheel.

f. $x = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}k\pi$ met $k$ geheel.

## Opgave 3

a. $x = k\pi$ of $x = \pm\frac{3}{4}\pi + 2k\pi$ met $k$ geheel.

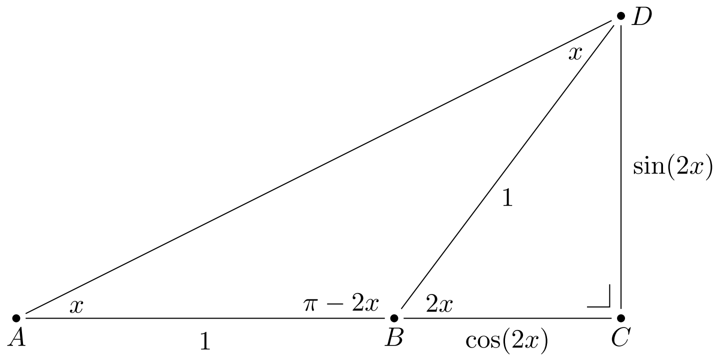
b. $x = \pm\frac{1}{6}\pi + k\pi$ met $k$ geheel.

c. $x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi$ of $x = \frac{5}{3}\pi + 2k\pi$ met $k$ geheel.

d. De enige oplossing in $[0, 2\pi]$ is $x = \frac{1}{2}\pi$.

e. $x = k\pi$ met $k$ geheel.

## Opgave* 4




a. Voor een gegeven $x$ kun je eerst de rechthoekige driehoek $BCD$ tekenen met een hoek van $2x$ en een schuine zijde van lengte 1. Vervolgens kun je $A$ links van $B$ tekenen zodat de hoek bij $A$ precies $x$ is.

b. Een gestrekte hoek heeft grootte $\pi$, dus de missende hoek bij het punt $B$ heeft grootte $\pi - 2x$. Omdat de hoeken van de driehoek $ABD$ samen ook $\pi$ moeten zijn, volgt hieruit dat de linkerhoek bij $D$ ook $x$ is. De rechterhoek bij punt $D$ is nu gelijk aan $\frac{\pi}{2} - 2x$. Deze is niet in de figuur getekend omdat we hem niet zullen gebruiken bij de volgende onderdelen.

c. De driehoek $ABD$ heeft twee gelijke hoeken, dus dit is een gelijkbenige driehoek. Dit betekent dat de lengte van $A$ naar $B$ gelijk is aan die van $B$ naar $D$, dus $|AB| = 1$. De definitie van de sinus zegt dat de lengte van zijde $CD$ gelijk is aan $\sin(2x)$. De definitie van de cosinus geeft $|BC| = \cos(2x)$.

d. We passen de stelling van Pythagoras toe op de rechthoekige driehoek $ACD$. Dit geeft

$$(1 + \cos(2x))^2 + \sin(2x)^2 = c^2$$

oftewel

$$1 + 2\cos(2x) + \cos^2(2x) + \sin^2(2x) = c^2.$$

Omdat $\cos^2(2x) + \sin^2(2x) = 1$ krijgen we $c = \sqrt{2 + 2\cos(2x)}$. De lengte van het lijnstuk $AD$ is dus $\sqrt{2 + 2\cos(2x)}$.

e. Als we deze regel toepassen op $ACD$ krijgen we $\cos(x) = \frac{1+\cos(2x)}{\sqrt{2+2\cos(2x)}}$

f. Het omschrijven van de vorige vergelijking geeft

$$\begin{aligned}\cos(x) &= \frac{1 + \cos(2x)}{\sqrt{2 + 2\cos(2x)}} = \frac{1 + \cos(2x)}{\sqrt{2}\sqrt{1 + 1\cos(2x)}} \\ &= \frac{\sqrt{1 + \cos(2x)}}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Kwadrateren geeft

$$\cos(x)^2 = \frac{1 + \cos(2x)}{2},$$

dus $2\cos(x)^2 = 1 + \cos(2x)$. Hieruit volgt dat $\cos(2x) = 1 - 2\cos(x)^2$, zoals gewenst.