Extra oefenopgaven: herhaling week 1

Opgave 1

Los op:

a. $\frac{(x-3)(x+1)}{x^2} = 0$

b. $\frac{x-2}{x+1} = 3$

c. $2x^2 + 10x + 11 = -1$

d. $e^{x^2} = 5$

e. $\ln(x-4) = 7$

f. $^{\frac{1}{4}}\log(\frac{1}{2}x) = \frac{1}{16}$

g. $^{4}\log(x) + 2 \cdot {}^{2}\log(3x) = 3$

h. $\sin(x) = \sin(2x)$

i. $2\sin(3x)\cos(4x) = 0$

Opgave 2

Bereken met behulp van de goniometrische formules:

a. $2\sin(\frac{1}{12}\pi)\cos(\frac{1}{12}\pi)$

b. $2\sin(-\frac{1}{12}\pi)\cos(\frac{1}{12}\pi)$

c. $\sin^2(\frac{9}{4}\pi)$

d. $4\sin(\frac{1}{8}\pi)\cos(\frac{1}{8}\pi)$

e. $\cos^2(\frac{1}{12}\pi) + \sin^2(\frac{1}{12}\pi)$

f. $\cos^2(\frac{1}{12}\pi) - \sin^2(\frac{1}{12}\pi)$

Opgave 3

Vereenvoudig:

a. $\left(\sqrt{2}\cos(t) + 1\right)\left(\sqrt{2}\cos(t) - 1\right)$

b. $3\cos^2(t) - \sin^2(t) - 1$

c. $(\sin(x) + \cos(x) + 1)(\sin(x) + \cos(x) - 1)$

d. $\cos(2x)(\sin(x) + \cos(x) + 1)(\sin(x) + \cos(x) - 1)$

Opgave 4

a. $y^2 - 5y + 6 = 0$

b. $\ln^2(x) - 5\ln(x) + 6 = 0$ (Hint: gebruik a.)

c. $y^2 - y > 0$

d. $e^{8x} - e^{4x} > 0$

e. $\cos^2(x) + 11\cos(x) = -30$

Opgave* 5[1]

In deze opgave gaan we de *abc*-formule afleiden. We beginnen dus met $ax^2 + bx + c = 0$ en willen laten zien dat $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Om de *abc*-formule te bewijzen hebben we wat voorkennis nodig.

a. De techniek die we nodig hebben heet *kwadraatafplitsen.* Lees bladzijde 81 in het basisboek wiskunde over kwadraatafspliten.

b. Maak de opgaven 10.9ace en 0.10be uit het basisboek.

We zullen nu in stappen de nulpunten van $ax^2 + bx + c$ uitrekenen.

c. Vermenigvuldig de linkerkant en rechterkant van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ met $4a$.

d. Haal vervolgens de $4ac$ naar de rechterkant.

e. Tel bij de linker- en rechterkant b^2 op.

f. Schrijf nu de linkerkant als kwadraat.

g. Bereken $2ax + b$.

h. Bereken tot slot x.

[1] Opgaven met een ster zijn voor mensen die meer willen weten en horen niet bij de tentamenstof.

Uitwerkingen extra oefenopgaven: herhaling week 1

Opgave 1

Los op:

a. Een breuk is nul als de teller nul is, oftewel $(x-3)(x-1)=0$. De oplossingen zijn dus $x=1$ en $x=3$.

b. Wanneer we links en rechts vermenigvuldigen met $x+1$ krijgen we $x-2=3\,(x+1)$. De haakjes uitwerken geeft $x-2=3x+3$ oftewel $-2x=5$. De oplossing is dus $x=-\frac{5}{2}$.

c. We halen eerst de -1 naar de linkerkant zodat we $2x^2+10x+12=0$ overhouden. Links en rechts delen door twee geeft $x^2+5x+6=0$ en de som/productregel geeft nu $(x+2)(x+3)=0$. De oplossingen zijn dus $x=-2$ en $x=-3$.

d. We hebben $x^2=\ln(5)$ dus $x=\pm\sqrt{\ln(5)}$.

e. We hebben $x-4=e^7$ dus $x=e^7+4$.

f. De vergelijking ${}^{\frac{1}{4}}\log(\frac{1}{2}x)=\frac{1}{16}$ zegt dat

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{16}}=\frac{1}{2}x.$$

Dit geeft

$$x=2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{16}}=2\cdot\left(2^{-2}\right)^{\frac{1}{16}}=2\cdot 2^{-\frac{1}{8}}=2^{\frac{7}{8}}=\sqrt[8]{2^7}.$$

g. We maken eerst overal een 2-log van:

$$\frac{{}^2\log(x)}{{}^2\log(4)}+2\cdot{}^2\log(3x)=3.$$

Herinner dat ${}^2\log(4)=2$, dus er geldt

$$\frac{1}{2}\cdot{}^2\log(x)+2\cdot{}^2\log(3x)=3.$$

Vervolgens gebruiken we dat $k\cdot\log(x)=\log(a^k)$:

$${}^2\log(x^{\frac{1}{2}})+{}^2\log((3x)^2)=3.$$

De somregel geeft nu ${}^2\log(x^{\frac{1}{2}}\cdot 9x^2)=3$, oftewel $9x^{\frac{5}{2}}=2^3=8$. Dit geeft $x^{\frac{5}{2}}=\frac{1}{3}$ dus $x=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{5}}$.

h. We hebben

$$\begin{aligned}\sin(x)=\sin(2x)&\implies \sin(x)=2\sin(x)\cos(x)\\&\implies \sin(x)-2\sin(x)\cos(x)=0\\&\implies \sin(x)\big(1-2\cos(x)\big)=0\\&\implies \sin(x)=0 \text{ of } 1-2\cos(x)=0\\&\implies \sin(x)=0 \text{ of } \cos(x)=\frac{1}{2}\\&\implies x=k\cdot\pi \text{ of } x=\frac{1}{3}\pi+k\cdot 2\pi \text{ of } x=\frac{2}{3}\pi+k\cdot 2\pi\end{aligned}$$

met k geheel.

i. Delen door twee geeft $\sin(3x)\cos(4x) = 0$. Een product is precies 0 als $\sin(3x) = 0$ of $\cos(4x) = 0$. De vergelijking $\sin(3x) = 0$ geeft $3x = k\pi$ oftewel $x = \frac{1}{3}k\pi$ met k geheel. De vergelijking $\cos(4x) = 0$ heeft als oplossingen $4x = \frac{1}{2}\pi + k\pi$ oftewel $x = \frac{1}{8}\pi + \frac{1}{4}k\pi$ met k geheel. Samen geeft dit dus

$$x = k \cdot \frac{1}{3}\pi \text{ of } x = \frac{1}{8}\pi + k \cdot \frac{1}{4}\pi$$

met k geheel.

Opgave 2

a. Met de dubbele-hoekformule $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ zien we dat $2\sin(\frac{1}{12}\pi)\cos(\frac{1}{12}\pi) = \sin(\frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{2}$.

b. Met de puntsymmetrie van de sinus en dezelfde dubbele-hoekformule als in onderdeel a. zien we dat $2\sin(-\frac{1}{12}\pi)\cos(\frac{1}{12}\pi) = -2\sin(\frac{1}{12}\pi)\cos(\frac{1}{12}\pi) = -\sin(\frac{1}{6}\pi) = -\frac{1}{2}$.

c. Er geldt $\sin^2(\frac{9}{4}\pi) = \sin^2(\frac{1}{4}\pi) = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}$.

d. Gebruik van de dubbele-hoekformule $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ geeft $4\sin(\frac{1}{8}\pi)\cos(\frac{1}{8}\pi) = 2\sin(\frac{1}{4}\pi) = 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = 2$.

e. We weten dat $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ voor alle x, dus in het bijzonder ook voor $x = \frac{1}{12}\pi$.

f. De dubbele-hoekformule $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ geeft hier $\cos^2(\frac{1}{12}\pi) - \sin^2(\frac{1}{12}\pi) = \cos(\frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Opgave 3

a. Haakjes uitwerken of gebruik van het merkwaardige product $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ geeft

$$\left(\sqrt{2}\cos(t) + 1\right)\left(\sqrt{2}\cos(t) - 1\right) = 2\cos^2(t) - 1 = \cos(2t).$$

De laatste stap is precies één van de dubbele-hoekformules voor de cosinus.

b. Merk op dat we de gegeven uitdrukking als volgt kunnen schrijven:

$$3\cos^2(t) - \sin^2(t) - 1 = 2\cos^2(t) + \cos^2(t) - \sin^2(t) - 1 = \left(2\cos^2(t) - 1\right) + \left(\cos^2(t) - \sin^2(t)\right).$$

Met de dubbele-hoekformules $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$ en $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ krijgen we tenslotte

$$\left(2\cos^2(t) - 1\right) + \left(\cos^2(t) - \sin^2(t)\right) = \cos(2t) + \cos(2t) = 2\cos(2t).$$

c. Haakjes uitwerken geeft dat

$$\begin{aligned}
&(\sin(x) + \cos(x) + 1)(\sin(x) + \cos(x) - 1) \\
&\quad = \sin^2(x) + \sin(x)\cos(x) - \sin(x) + \cos(x)\sin(x) + \cos^2(x) - \cos(x) + \sin(x) + \cos(x) - 1 \\
&\quad = \sin^2(x) + \sin(x)\cos(x) + \cos(x)\sin(x) + \cos^2(x) - 1 \\
&\quad = \sin^2(x) + 2\sin(x)\cos(x) + \cos^2(x) - 1.
\end{aligned}$$

Omdat $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ en $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ volgt dat bovenstaande gelijk is aan

$$\sin^2(x) + 2\sin(x)\cos(x) + \cos^2(x) - 1 = 2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x).$$

d. Vanuit onderdeel c. weten we dat $(\sin(x) + \cos(x) + 1)(\sin(x) + \cos(x) - 1) = \sin(2x)$ en dit invullen geeft

$$\cos(2x)\,(\sin(x) + \cos(x) + 1)\,(\sin(x) + \cos(x) - 1) = \cos(2x)\sin(2x).$$

Wegens de dubbele-hoekformule $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ krijgen we dan

$$\cos(2x)\sin(2x) = \frac{1}{2}\sin(4x).$$

Opgave 4

a. De som/productregel geeft $y^2 - 5y + 6 = (y-3)(y-2)$ dus we krijgen $y = 2$ of $y = 3$.

b. Dit is dezelfde vergelijking als a, maar dan met $y = \ln(x)$. Het vorige onderdeel geeft nu $\ln(x) = 2$ of $\ln(x) = 3$, dus $x = e^2$ of $x = e^3$.

c. We lossen eerst de bijbehorende gelijkheid $y^2 - y = 0$ op. We hebben $y^2 - y = y(y-1)$ dus $y = 0$ of $y = 1$. Dit is een dalparabool (teken de grafiek), dus het antwoord is $y < 0$ of $y > 1$.

d. Dit is dezelfde ongelijkheid als c. wanneer we $y = e^{4x} > 0$ schrijven. Het vorige onderdeel geeft dat $e^{4x} < 0$ of $e^{4x} > 1$. Een e-macht is altijd positief, dus $e^{4x} < 0$ heeft geen oplossingen. We moeten nu dus $e^{4x} > 1$ oplossen. De gelijkheid geeft $e^{4x} = 1 = e^0$ oftewel $4x = 0$ dus $x = 0$. We zien dat de e-macht groter wordt als x toeneemt, dus de oplossing is $x > 0$.

e. We lossen eerst de vergelijking $y^2 + 11y = -30$ op en vullen later $y = \cos(x)$ in. Op 0 herleiden geeft

$$y^2 + 11y + 30 = 0.$$

De som/productregel geeft nu $(y+5)(y+6) = 0$, dus $y = -5$ of $y = 6$ oftewel $\cos(x) = -5$ of $\cos(x) = -6$. De cosinus van een hoek zit altijd tussen -1 en 1 en neemt dus nooit de waarden -5 en -6 aan. Dit betekent dat de vergelijking geen oplossingen heeft.

Opgave* 5

De afleiding van de *abc*-formule staat op bladzijde 83 in het basisboek.