UNIVERSITEIT VAN AMSTERDAM
FNWI

Toets Wiskunde B
25 juli 2016, 10:00-13:00

---

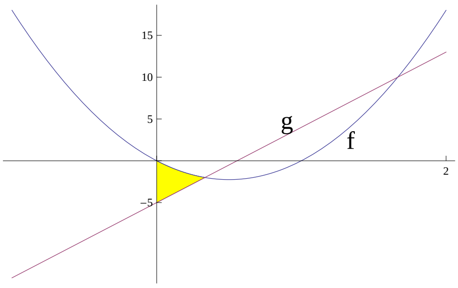
Het gebruik van een formulekaart is niet toegestaan.
Alleen het gebruik van een "gewone" eenvoudige rekenmachine is toegestaan.

---

1. De twee functies $f$ en $g$ worden gegeven door

$$f(x) = 9x(x-1) \quad \text{en} \quad g(x) = 9x - 5.$$

In Figuur 1 zijn de grafieken van $f$ en $g$ getekend.




Figuur 1: De grafieken van de functies $f$ en $g$.

(a) Los de ongelijkheid $f(x) \leq g(x)$ exact op.

(b) Bepaal exact het minimum van de functie $f$.

(c) Bekijk het gebied tussen de twee snijpunten van $f$ en $g$.
Voor welke $x$ is hier de verticale afstand tussen $f$ en $g$ maximaal?

(d) Bereken exact de oppervlakte van het gearceerde gebied, d.w.z. het gebied ingesloten door de grafieken van de twee functies en de verticale lijnen $x = 0$ en $x = \frac{1}{3}$?

(e) Voor welke waarde van $c$ is de lijn met vergelijking $y = 9x - c$ een raaklijn door een punt op de grafiek van $f$?

2. Bepaal exact de *nulpunten*, de *minima* en *maxima* van de functie

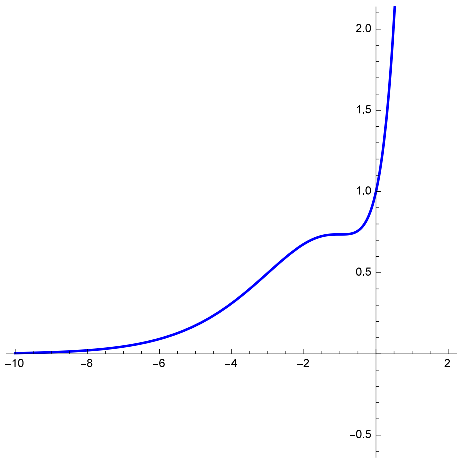
$$f(x) = \frac{x-2}{x+1} + 1$$

Bepaal ook voor welke waarden van $x$ de functies gedefinieerd zijn, het zogenaamde *domein*, en welke waarden ze kunnen aannemen, het zogenaamde *bereik*. Schets ook de *grafiek* van deze functie.

3. Gegeven is de functie

$$f(x) = (x^2 + 1)e^x$$

In Figuur 2 is de grafiek van $f$ getekend.




Figuur 2: De grafiek van de functie $f$.

(a) Laat zien de functie $f$ geen nulpunten heeft.

(b) Toon aan dat de functie $f$ geen maximum of minimum heeft.

(c) De functie $f$ heeft twee buigpunten.
Bereken exact de coördinaten van deze buigpunten.

4. Los exact op:

   (a)
$$\frac{2x}{x^2+x} = \frac{1}{x^2-1}$$

   (b)
$$\ln(x) + \ln(2) = 2$$

   (c)
$$\tan(x) = 1$$

   (d)
$$\sin(2x) = \cos(x)$$

5. Differentieer de volgende functies:

   (a)
$$f(x) = \cos\big(\sqrt{2x}\big)$$

   (b)
$$g(x) = \frac{x^2}{e^x}$$

6. Bereken de volgende integralen en vereenvoudig zo veel mogelijk:

   (a)
$$\int_0^2 (x-1)^3\,dx$$

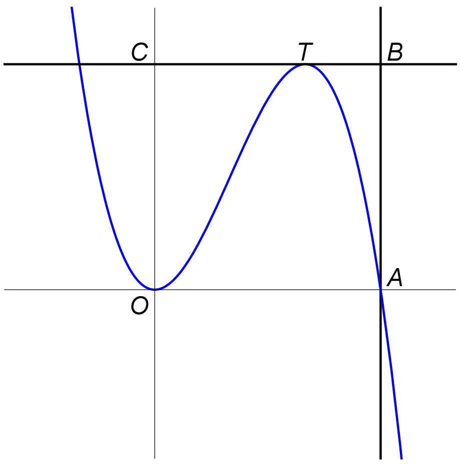
   (b)
$$\int_1^4 \frac{1}{2x}\,dx$$

7. Gegeven is de functie $f_p$ die van een positieve parameter $p$ afhangt:

$$f_p(x) = p\,x^2 - x^3$$

Het lokale maximum van deze functie (de top) noemen we $T$.
Behalve in de oorsprong $O$ heeft de functie nog een snijpunt met de $x$-as dat we met $A$ aanduiden.
De horizontale lijn door de top $T$ snijdt de $y$-as in het punt $C$.
De verticale lijn door $A$ en de horizontale lijn door $C$ snijden elkaar in het punt $B$.

In Figuur 3 is de grafiek van een $f_p$ getekend voor een zekere waarde van $p$ en zijn ook de genoemde punten en lijnen getekend.




Figuur 3: Schets van de grafiek van $f_p$ en de rechthoek $OABC$.

Bereken de verhouding van de oppervlakten van de rechthoek $OABC$ en het vlakdeel ingesloten door de grafiek van $f$ de $x$-as.
Laat ook zien dat deze verhouding niet van de parameter $p$ afhangt.