

Zomercursus Wiskunde B

Week 3, les 3

Jolien Oomens
J.J.Oomens@uva.nl

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica
Universiteit van Amsterdam



20 juli 2017

Primitiveren

De afgeleide van $\cos(ax + b)$ is $-a \sin(ax + b)$, dus een primitieve van $\sin(ax + b)$ is $-\frac{1}{a} \cos(ax + b)$.

Immers

$$\begin{aligned} \left[-\frac{1}{a} \cos(ax + b)\right]' &= -\frac{1}{a} \cdot -a \sin(ax + b) \\ &= \sin(ax + b) \end{aligned}$$

Zo ook is $\frac{1}{a} e^{ax+b}$ een primitieve van e^{ax+b} en is $\frac{1}{a \ln 2} 2^{ax+b}$ een primitieve van 2^{ax+b} .

$f(x)$	$F(x)$
e^{3x-2}	$\frac{1}{3} e^{3x-2}$
$\cos(-2x + 1)$	$-\frac{1}{2} \sin(-2x + 1)$
$\frac{1}{3x+8} = (3x + 8)^{-1}$	$\frac{1}{3} \ln 3x + 8 $
$(3 - x)^5$	$-\frac{1}{6} (3 - x)^6$
e^{-x}	$-e^{-x}$

$f(x)$	$F(x)$
1	x
x	$\frac{1}{2} x^2$
x^n	$\frac{1}{n+1} x^{n+1}$
x^{-1}	$\ln x $
e^x	e^x
$\cos x$	$\sin x$
$\sin x$	$-\cos x$
a^x	$\frac{1}{\ln a} a^x$
$g(ax + b)$	$\frac{1}{a} G(ax + b)$

Differentiëren

Belangrijk geval van de kettingregel:

$u = ax + b$. Bijvoorbeeld

$$f(x) = \cos(ax + b) \quad u = ax + b$$

$$f(u) = \cos u$$

$$f'(u) = -\sin u \quad u' = a$$

$$f'(x) = -\sin(u) \cdot a = -a \sin(ax + b).$$

Zo ook

$$[e^{3x-2}]' = 3e^{3x-2}$$

$$[\ln(2x + 5)]' = \frac{2}{2x+5}$$

$$[3^{x-3}]' = \ln(3)3^{x-3}$$

$$[\sin(3x)]' = 3 \cos(3x)$$

$$[e^{-x}]' = -e^{-x}$$

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^{n-1}
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
e^x	e^x
$\ln x$	$1/x$
a^x	$\ln(a)a^x$
${}^a \log x$	$\frac{1}{\ln(a)x}$

$$[f + g]' = f' + g'$$

$$[cf]' = cf'$$

$$[fg]' = f'g + fg'$$

$$\left[\frac{t}{n}\right]' = \frac{nt' - tn'}{n^2}$$

$$[f(u)]' = f'(u)u'$$

Differentiëren

Bepaal de afgeleide

$$f(x) = \sin(e^x)$$

$$f(u) = \sin(u) \quad u = e^x$$

$$f'(u) = \cos(u) \quad u' = e^x$$

$$f'(x) = \cos(u)e^x = \cos(e^x)e^x$$

$$g(x) = x \sin(e^x)$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= [x]' \sin(e^x) + x [\sin(e^x)]' \\ &= \sin(e^x) + x \cos(e^x)e^x \end{aligned}$$

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^{n-1}
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
e^x	e^x
$\ln x$	$1/x$
a^x	$\ln(a)a^x$
${}^a \log x$	$\frac{1}{\ln(a)x}$

$$[f + g]' = f' + g'$$

$$[cf]' = cf'$$

$$[fg]' = f'g + fg'$$

$$\left[\frac{t}{n}\right]' = \frac{nt' - tn'}{n^2}$$

$$[f(u)]' = f'(u)u'$$

Differentiëren

Bepaal de afgeleide

$$h(x) = x^2 \ln(2 - x^3)$$

$$\begin{aligned} h'(x) &= 2x \ln(2 - x^3) + x^2 [\ln(2 - x^3)]' \\ &= 2x \ln(2 - x^3) + x^2 \cdot \left(-\frac{3x^2}{2 - x^3} \right) \\ &= 2x \ln(2 - x^3) - \frac{3x^4}{2 - x^3} \end{aligned}$$

$$j(x) = \ln(2 - x^3)$$

$$j(u) = \ln(u) \quad u = 2 - x^3$$

$$j'(u) = \frac{1}{u} \quad u' = -3x^2$$

$$j'(x) = \frac{1}{u} \cdot -3x^2 = -\frac{3x^2}{2 - x^3}$$

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^{n-1}
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
e^x	e^x
$\ln x$	$1/x$
a^x	$\ln(a)a^x$
${}^a \log x$	$\frac{1}{\ln(a)x}$

$$[f + g]' = f' + g'$$

$$[cf]' = cf'$$

$$[fg]' = f'g + fg'$$

$$\left[\frac{t}{n} \right]' = \frac{nt' - tn'}{n^2}$$

$$[f(u)]' = f'(u)u'$$

Oppervlakte en integraal

De oppervlakte tussen $x = a$ en $x = b$ onder de grafiek van een functie f met primitieve F wordt gegeven door

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Voorbeelden van integralen:

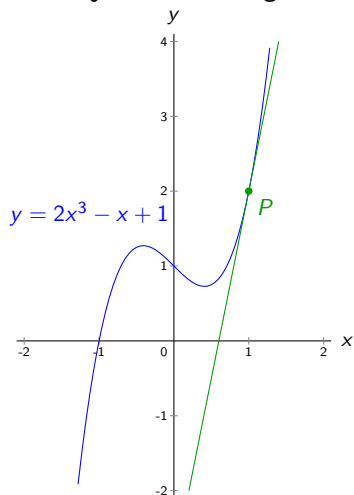
$$\begin{aligned} \int_0^4 e^{-2x} dx &= \left[-\frac{1}{2} e^{-2x} \right]_0^4 \\ &= -\frac{1}{2} e^{-8} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1 - e^{-8}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} \cos(3\pi x) dx &= \left[\frac{1}{3\pi} \sin(3\pi x) \right]_0^{1/2} \\ &= \frac{1}{3\pi} (\sin \frac{3\pi}{2} - \sin 0) = -\frac{1}{3\pi} \end{aligned}$$

$f(x)$	$F(x)$
1	x
x	$\frac{1}{2}x^2$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$
x^{-1}	$\ln x $
e^x	e^x
$\cos x$	$\sin x$
$\sin x$	$-\cos x$
a^x	$\frac{1}{\ln a} a^x$

Raaklijnen

Bekijk een functie f . De raaklijn aan f in een punt $P = (a, f(a))$ is de lijn die door P gaat en dezelfde helling heeft als f in P .



Dus deze lijn voldoet aan 2 dingen:

- De helling is $f'(a)$.
- De lijn gaat door $(a, f(a))$.

In het plaatje is $a = 1$, $f(1) = 2$ en

$$f'(x) = 6x^2 - 1,$$

dus $f'(1) = 5$. We zoeken een lijn:

$$y = 5x + b.$$

Invullen $(1, 2)$ geeft $2 = 5 \cdot 1 + b$, dus $b = -3$. De raaklijn: $y = 5x - 3$.

Toppen en tweede afgeleide

Vinden van toppen van een functie f :

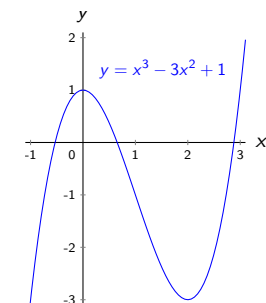
- als $f'(a) = 0$ en $f''(a) < 0$ heeft f een maximum in $x = a$,
- als $f'(a) = 0$ en $f''(a) > 0$ heeft f een minimum in $x = a$.

Voorbeeld:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

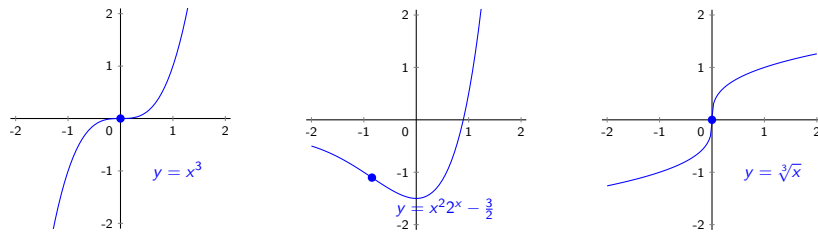
$$f''(x) = 6x - 6.$$



In dit geval zijn de nulpunten van $f'(x)$ gelijk aan $x = 0$ en $x = 2$. We hebben $f''(0) = -6$, dus $(0, 1)$ is een maximum. Verder is $f''(2) = 12 - 6 = 6$, dus $(2, -3)$ is een minimum.

Buigpunten

Een buigpunt x van f is een punt waar de functie overgaat van hol naar bol of andersom. Er geldt $f''(x) = 0$.



Pas op:

- Als $f''(x) = 0$ dan kan het ook een min/max zijn.
- De eerste afgeleide hoeft niet nul te zijn in x .
- Heel soms bestaat de afgeleide in een punt niet.

Dus: los $f''(x) = 0$ op en teken de grafiek.

Opgaven en indeling

Opgaven

20.16 ac, 20.17 ac, 20.18 b, extra.

Antwoorden van de opgaven staan achterin, uitwerkingen van de extra opgaven op <http://www.bliggy.net/cursusB.html>.

Groepen

De indeling is op basis van je achternaam:

- A t/m D: **zaal A1.04** (Gideon Jager)
- E t/m Kuhl: zaal D1.115 (Jeroen Eijkens)
- Kuhlhan t/m Seydel: zaal D1.113 (Sebastian Zur)
- Simsir t/m Z: **zaal D1.116** (Thijs Benjamins)