

Zomercursus Wiskunde B

Week 1, les 3

Jolien Oomens
J.J.Oomens@uva.nl

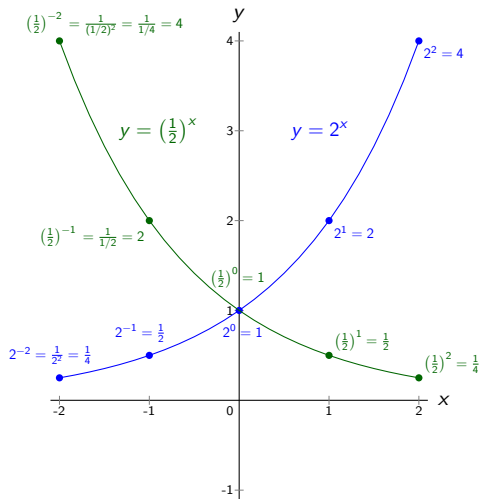
Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica
Universiteit van Amsterdam



6 juli 2017

Exponentiële functies

Bekijk de functies $f(x) = 2^x$, $g(x) = (\frac{1}{2})^x$.



Regels voor machtsverheffen

$$\begin{aligned}g^{a+b} &= g^a g^b \\g^0 &= 1 \\g^{-a} &= \frac{1}{g^a} \\g^{b-a} &= \frac{g^b}{g^a} \\(g^a)^b &= g^{ab} \\(gh)^a &= g^a h^a \\g^{1/a} &= \sqrt[a]{g}\end{aligned}$$

Machten

Machtsverheffen:

$$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16.$$

Regels zijn waar:

$$\begin{aligned}g^{a+b} &= \underbrace{g \cdot g \cdot \dots \cdot g \cdot g}_{a+b \text{ keer}} \\&= \underbrace{g \cdot \dots \cdot g}_a \cdot \underbrace{g \cdot \dots \cdot g}_b = g^a g^b.\end{aligned}$$

Worteltrekken is het omgekeerde:

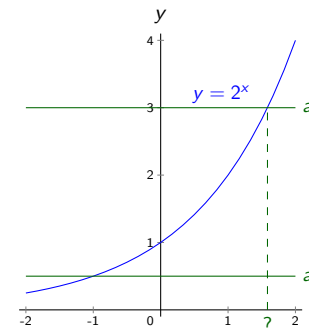
$$\begin{aligned}5^2 = 25 &\Rightarrow \sqrt{25} = \sqrt{25} = 5 \\a^3 = b &\Rightarrow a = \sqrt[3]{b}.\end{aligned}$$

Regels voor machtsverheffen

$$\begin{aligned}g^{a+b} &= g^a g^b \\g^0 &= 1 \\g^{-a} &= \frac{1}{g^a} \\g^{b-a} &= \frac{g^b}{g^a} \\(g^a)^b &= g^{ab} \\(gh)^a &= g^a h^a \\g^{1/a} &= \sqrt[a]{g}\end{aligned}$$

Exponentiële vergelijkingen

We willen oplossen $2^x = a$.



Regels voor machtsverheffen

$$\begin{aligned}g^{a+b} &= g^a g^b \\g^0 &= 1 \\g^{-a} &= \frac{1}{g^a} \\g^{b-a} &= \frac{g^b}{g^a} \\(g^a)^b &= g^{ab} \\(gh)^a &= g^a h^a \\g^{1/a} &= \sqrt[a]{g}\end{aligned}$$

We hebben:

$$\begin{aligned}2^x = \frac{1}{2} &\Rightarrow x = {}^2\log \frac{1}{2} = -1 \\2^x = 3 &\Rightarrow x = {}^2\log 3 \approx 1.6\end{aligned}$$

Logaritmen

De oplossing van de vergelijking $2^x = a$ is $x = {}^2\log a$. Meer algemeen is $x = {}^g\log a$ de oplossing van $g^x = a$. Dus:

$$g^{{}^g\log a} = a.$$

Voorbeelden:

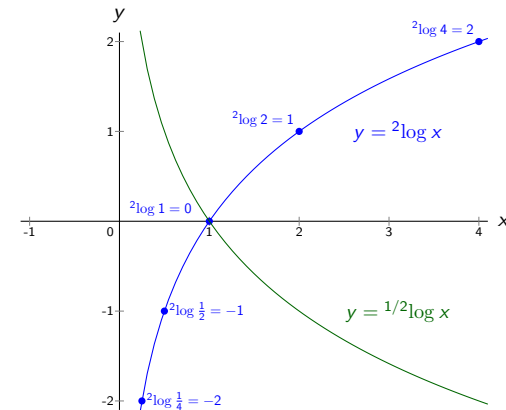
$$\begin{aligned} {}^3\log 9 &= 2 && \text{want } 3^2 = 9 \\ {}^5\log \frac{1}{25} &= -2 && \text{want } 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} \\ {}^g\log 1 &= 0 && \text{want } g^0 = 1 \\ {}^g\log(-1) &\text{ bestaat niet} && \text{want } g^x > 0 \\ {}^{1/2}\log 2 &= -1 && \text{want } \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \frac{1}{1/2} = 2 \\ {}^3\log \sqrt{3} &= \frac{1}{2} && \text{want } \sqrt{3} = 3^{1/2} \end{aligned}$$

Regels voor machtsverheffen

$$\begin{aligned} g^{a+b} &= g^a g^b \\ g^0 &= 1 \\ g^{-a} &= \frac{1}{g^a} \\ g^{b-a} &= \frac{g^b}{g^a} \\ (g^a)^b &= g^{ab} \\ (gh)^a &= g^a h^a \\ g^{1/a} &= \sqrt[a]{g} \end{aligned}$$

Grafiek van de logaritme

De logaritme $y = {}^2\log a$ is de oplossing van de vergelijking $2^y = a$. Bekijk de functies $f(x) = {}^2\log x$, $g(x) = {}^{1/2}\log x$.



Exponentiële vergelijkingen

Herinner

$$g^x = a \Rightarrow x = {}^g\log a.$$

Los op:

$$\begin{aligned} 2^{x+3} = 16 &\Rightarrow x + 3 = {}^2\log 16 \Rightarrow x + 3 = 4 \\ &\Rightarrow x = 1. \end{aligned}$$

Zo ook

$$\begin{aligned} 5^{1-2x} = 2 &\Rightarrow 1 - 2x = {}^5\log 2 \Rightarrow 2x = 1 - {}^5\log 2 \\ &\Rightarrow x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot {}^5\log 2. \end{aligned}$$

Ten slotte

$$9^{x^2} = 3 \Rightarrow x^2 = {}^9\log 3 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Vergelijkingen met logaritmen

De vergelijking ${}^g\log x = a$ heeft als oplossing $x = g^a$:

$${}^g\log g^a = a.$$

Voorbeelden:

$${}^2\log(x-2) = 3 \Rightarrow x-2 = 2^3,$$

dus $x = 2^3 + 2 = 10$. Verder:

$$\begin{aligned} {}^2\log(2x-2) + {}^2\log x &= 2 \\ {}^2\log(x(2x-2)) &= 2 \\ {}^2\log(2x^2 - 2x) &= 2 \\ 2x^2 - 2x &= 2^2 \\ x^2 - x - 2 &= 0. \end{aligned}$$

Regels voor machtsverheffen

$$\begin{aligned} g^{a+b} &= g^a g^b \\ g^{-a} &= \frac{1}{g^a} \\ (g^a)^b &= g^{ab} \\ (gh)^a &= g^a h^a \end{aligned}$$

Regels voor logaritmen

$$\begin{aligned} g^x = a &\Rightarrow x = {}^g\log a \\ {}^g\log a + {}^g\log b &= {}^g\log(ab) \\ {}^g\log a - {}^g\log b &= {}^g\log\left(\frac{a}{b}\right) \\ {}^g\log a^n &= n {}^g\log a \\ {}^g\log a &= \frac{{}^h\log a}{{}^h\log g}. \end{aligned}$$

Vergelijkingen met logaritmes

De vergelijking ${}^g \log x = a$ heeft als oplossing $x = g^a$:

$${}^g \log g^a = a.$$

Voorbeelden:

$${}^3 \log(x-1) + {}^{1/3} \log x = 1$$

$${}^3 \log(x-1) + \frac{{}^3 \log x}{{}^3 \log 1/3} = 1$$

$${}^3 \log(x-1) + \frac{{}^3 \log x}{-1} = 1$$

$${}^3 \log(x-1) - {}^3 \log x = 1$$

$${}^3 \log \frac{x-1}{x} = 1$$

$$\frac{x-1}{x} = 3$$

$$x-1 = 3x$$

Regels voor machtsverheffen

$$g^{a+b} = g^a g^b$$

$$g^{-a} = \frac{1}{g^a}$$

$$(g^a)^b = g^{ab}$$

$$(gh)^a = g^a h^a$$

Regels voor logaritmes

$$g^x = a \Rightarrow x = {}^g \log a$$

$${}^g \log a + {}^g \log b = {}^g \log(ab)$$

$${}^g \log a - {}^g \log b = {}^g \log \left(\frac{a}{b}\right)$$

$${}^g \log a^n = n {}^g \log a$$

$${}^g \log a = \frac{{}^h \log a}{{}^h \log g}.$$

Opgaven en indeling

Opgaven

18.1, 18.2, 18.9, 18.10, 18.17, 18.18, extra.

Antwoorden van de opgaven staan achterin, uitwerkingen van de extra opgaven op <http://www.bliggy.net/cursusB.html>.

Groepen

De indeling is op basis van je achternaam:

- A t/m D: zaal A1.08 (Gideon Jager)
- E t/m Kuhl: zaal D1.115 (Jeroen Eijkens)
- Kuhlhan t/m Seydel: zaal D1.113 (Sebastian Zur)
- Simsir t/m Z: zaal D1.112 (Thijs Benjamins)