Zomercursus Wiskunde B

Week 2, les 1

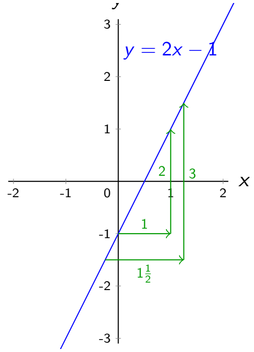
Jolien Oomens
J.J.Oomens@uva.nl

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica
Universiteit van Amsterdam

10 juli 2017

Helling

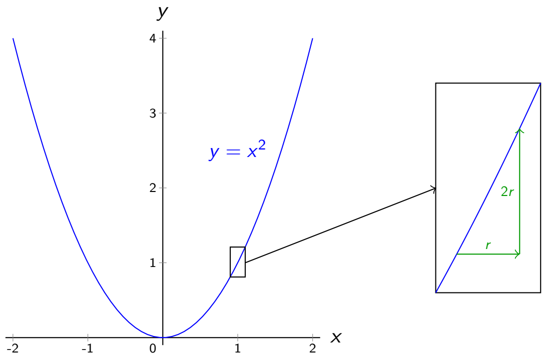
De lineaire functie $ax + b$ heeft *helling* of *richtingscoëfficiënt* a: als je op de grafiek r naar rechts gaat, ga je ar omhoog.



Bij $f(x) = x^2$ vinden we dat de helling in $x = 1$ gelijk is aan 2.
Notatie: $f'(1) = 2$. Zo ook $f'(-1) = -2$, $f'(0) = 0$.

Helling

De lineaire functie $ax + b$ heeft *helling* of *richtingscoëfficiënt* a: als je op de grafiek r naar rechts gaat, ga je ar omhoog.
Voor niet-lineaire functies verschilt de helling per punt:

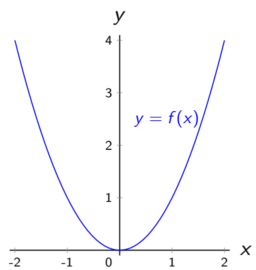


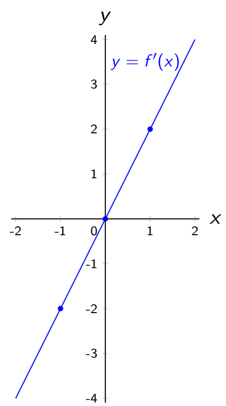
Bij $f(x) = x^2$ vinden we dat de helling in $x = 1$ gelijk is aan 2.
Notatie: $f'(1) = 2$. Zo ook $f'(-1) = -2$, $f'(0) = 0$.

Afgeleide functie

De *afgeleide* $f'(x)$ van een functie f geeft de helling van f in het punt $(x, f(x))$.

$f(x)$	$f'(x)$
$ax + b$	a
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
x^n	nx^{n-1}
c	0
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

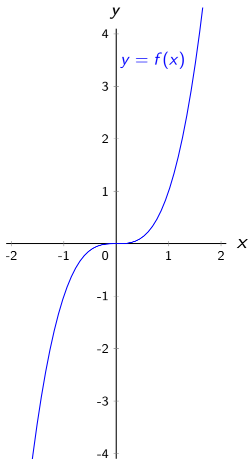


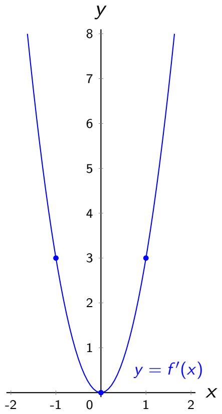


Afgeleide functie

De *afgeleide* $f'(x)$ van een functie f geeft de helling van f in het punt $(x, f(x))$.

$f(x)$	$f'(x)$
$ax+b$	a
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
x^n	nx^{n-1}
c	0
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

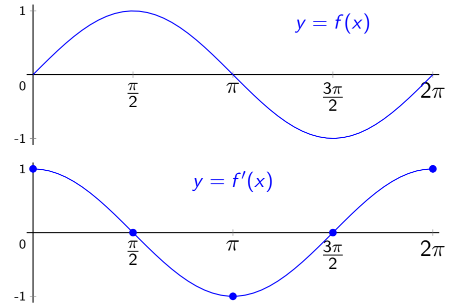




Afgeleide functie

De *afgeleide* $f'(x)$ van een functie f geeft de helling van f in het punt $(x, f(x))$.

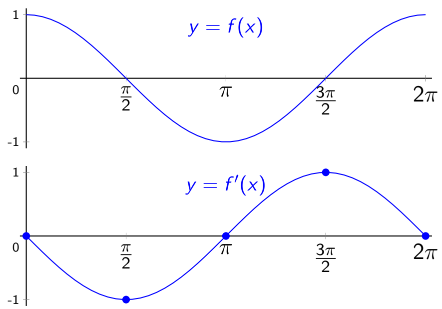
$f(x)$	$f'(x)$
$ax+b$	a
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
x^n	nx^{n-1}
c	0
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$



Afgeleide functie

De *afgeleide* $f'(x)$ van een functie f geeft de helling van f in het punt $(x, f(x))$.

$f(x)$	$f'(x)$
$ax+b$	a
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
x^n	nx^{n-1}
c	0
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$



Voorbeelden van afgeleides

Bij het berekenen van afgeleides gebruiken we:

$$[f(x)+g(x)]' = f'(x)+g'(x)$$
$$[af(x)]' = af'(x).$$

$$k(x) = x^2 + \sin x$$
$$k'(x) = 2x + \cos x$$

$$\ell(x) = 3x^3$$
$$\ell'(x) = 3 \cdot 3x^2 = 9x^2$$

$f(x)$	$f'(x)$
b	0
x	1
$ax+b$	a
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
x^n	nx^{n-1}
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

Voorbeelden van afgeleides

Bij het berekenen van afgeleides gebruiken we:

$$[f(x)+g(x)]' = f'(x)+g'(x)$$
$$[af(x)]' = af'(x).$$

$$f(x) = x^2 - 3x + 6$$
$$f'(x) = 2x - 3$$

$$g(x) = 4x^4 - \cos x$$
$$g'(x) = 16x^3 + \sin x$$

$$h(x) = (3x-1)^2 = 9x^2 - 6x + 1$$
$$h'(x) = 18x - 6$$

$f(x)$	$f'(x)$
b	0
x	1
$ax+b$	a
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
x^n	nx^{n-1}
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

Voorbeelden van afgeleides

Bij het berekenen van afgeleides gebruiken we:

$$[f(x)+g(x)]' = f'(x)+g'(x)$$
$$[af(x)]' = af'(x).$$

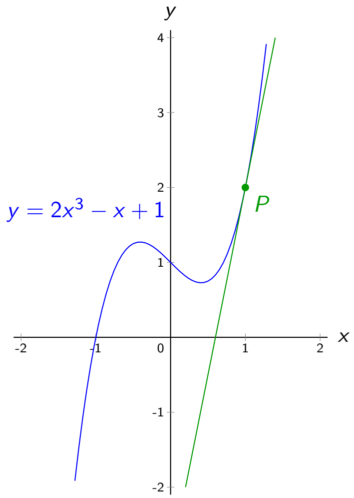
$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$
$$f'(x) = \tfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{x^{1/2}} = \tfrac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$g(x) = \tfrac{1}{x} = x^{-1}$$
$$g'(x) = -1\cdot x^{-2} = -\tfrac{1}{x^2}$$

$f(x)$	$f'(x)$
b	0
x	1
$ax+b$	a
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
x^n	nx^{n-1}
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

Raaklijnen

Bekijk een functie f. De *raaklijn* aan f in een punt $P = (a, f(a))$ is de lijn die door P gaat en dezelfde helling heeft als f in P.



Dus deze lijn voldoet aan 2 dingen:

- De helling is $f'(a)$.
- De lijn gaat door $(a, f(a))$.

In het plaatje is $a = 1$, $f(1) = 2$ en

$$f'(x) = 6x^2 - 1,$$

dus $f'(1) = 5$. We zoeken een lijn:

$$y = 5x + b.$$

Invullen $(1,2)$ geeft $2 = 5\cdot 1 + b$, dus $b = -3$. De raaklijn: $y = 5x - 3$.

Raaklijnen

De raaklijn aan de grafiek f in $P = (a, f(a))$ heeft helling $f'(a)$ en gaat door P. Voorbeeld:

$$f(x) = \sin x + 2x - 3, \qquad a = \tfrac{3\pi}{2}.$$

We hebben $f'(x) = \cos x + 2$, dus $f'(\frac{3\pi}{2}) = \cos(\frac{3\pi}{2}) + 2 = 2$. De gezochte lijn is van de vorm

$$y = 2x + b,$$

en moet gaan door het punt $\left(\frac{3\pi}{2}, f(\frac{3\pi}{2})\right)$. We hebben

$$f(\tfrac{3\pi}{2}) = \sin(\tfrac{3\pi}{2}) + 2\cdot\tfrac{3\pi}{2} - 3 = -1 + 3\pi - 3 = 3\pi - 4.$$

Dit geeft

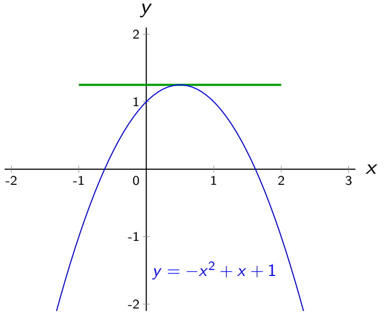
$$3\pi - 4 = 2\cdot\tfrac{3\pi}{2} + b \quad\Rightarrow\quad 3\pi - 4 = 3\pi + b \quad\Rightarrow\quad b = -4.$$

Vinden van toppen

We zoeken de top van $f(x) = -x^2 + x + 1$. Als $(a, f(a))$ een top is, dan is $f'(a) = 0$, dus we lossen op

$$0 = f'(x) = -2x + 1 \quad \Rightarrow \quad 2x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \tfrac{1}{2}.$$

Dit geeft de x-coördinaat van de top. De y-coördinaat wordt gegeven door $f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 = 1\frac{1}{4}$.



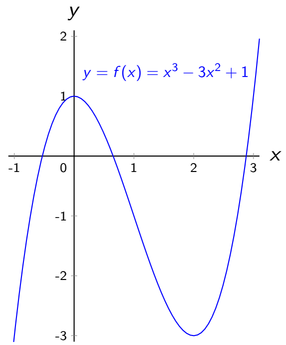
$f(x)$	$f'(x)$
b	0
x	1
x^2	$2x$
x^n	nx^{n-1}
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

Vinden van toppen

We vinden toppen door op te lossen $f'(x) = 0$. Voorbeeld:

$$0 = f'(x) = 3x^2 - 6x = x(3x - 6) \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad \text{of} \quad x = 2.$$

De bijbehorende y-coördinaten worden gegeven door $f(0) = 1$ en $f(2) = 8 - 3 \cdot 4 + 1 = -3$. De toppen zijn $(0, 1)$ en $(2, -3)$.



$f(x)$	$f'(x)$
b	0
x	1
x^2	$2x$
x^n	nx^{n-1}
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

Opgaven en indeling

Opgaven

20.1, 20.2, 20.4, 20.5, 20.7, 20.9, 20.30, 20.31, extra.

Antwoorden van de opgaven staan achterin, uitwerkingen van de extra opgaven op http://www.bliggy.net/cursusB.html.

Groepen

De indeling is op basis van je achternaam:

- A t/m D: zaal A1.04 (Gideon Jager)
- E t/m Kuhl: zaal D1.115 (Jeroen Eijkens)
- Kuhlhan t/m Seydel: zaal D1.110 (Sebastian Zur)
- Simsir t/m Z: zaal D1.112 (Thijs Benjamins)