Zomercursus Wiskunde B

Week 2, les 2

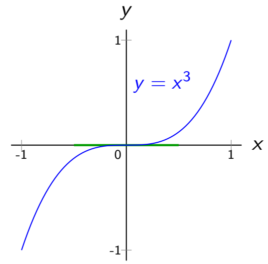
Jolien Oomens
J.J.Oomens@uva.nl

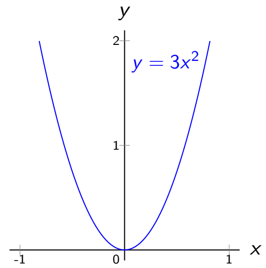
Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica
Universiteit van Amsterdam

11 juli 2017

Toppen of buigpunten

We hebben gezien dat als er in $x = a$ een top is, dan is $f'(a) = 0$.
Maar als $f'(a) = 0$, hoeft a nog geen top te zijn:

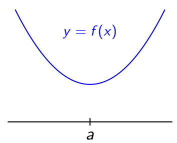
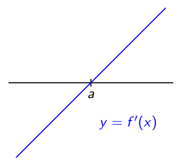
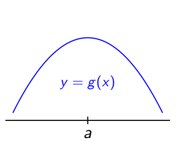
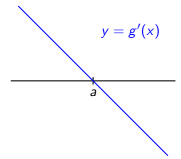
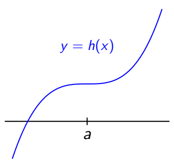
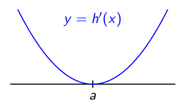




We hebben $f'(0) = 0$, maar 0 is een *buigpunt* en geen top van f.
Probleem: 0 is ook een top van f'.

Maximum, minimum of buigpunt

Als $f'(a) = 0$, is dit een maximum, minimum of buigpunt?

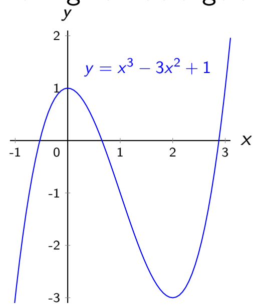
minimum f' stijgend in a $f''(a) > 0$		
maximum f' dalend in a $f''(a) < 0$		
buigpunt f' horizontaal in a $f''(a) = 0$		

Tweede afgeleide

De *tweede afgeleide* $f''(x)$ van f geeft de helling van de afgeleide.

Voorbeeld:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$$
$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$
$$f''(x) = 6x - 6.$$



Hiermee vinden we toppen:

- als $f'(a) = 0$ en $f''(a) < 0$ heeft f een maximum in $x = a$,
- als $f'(a) = 0$ en $f''(a) > 0$ heeft f een minimum in $x = a$.

In dit geval zijn de nulpunten van $f'(x)$ gelijk aan $x = 0$ en $x = 2$.
We hebben $f''(0) = -6$, dus $(0, 1)$ is een maximum. Verder is $f''(2) = 12 - 6 = 6$, dus $(2, -3)$ is een minimum.

Product en quotiëntregel

Afgeleides van producten en quotiënten:

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$
$$\left[\frac{t(x)}{n(x)}\right]' = \frac{n(x)t'(x) - t(x)n'(x)}{n(x)^2}.$$

$f(x)$	$f'(x)$
1	0
x	1
x^2	$2x$
x^n	nx^{n-1}
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

Voorbeelden:

$$k(x) = x \sin x$$
$$k'(x) = \sin x + x \cos x$$

$$\ell(x) = \frac{x^2}{\cos x}$$
$$\ell'(x) = \frac{\cos(x)2x - x^2 \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{2x\cos x + x^2 \sin x}{\cos^2 x}.$$

Toppen met de productregel

Vind de toppen van $f(x) = x\sin x + \cos x$ tussen 0 en 2π. Er geldt

$$f'(x) = [x \sin x]' - \sin x$$
$$= 1 \cdot \sin x + x\cos x - \sin x = x \cos x.$$

Oplossen van $x \cos x = 0$ geeft $x = 0$ of

$$\cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \tfrac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \text{ of } x = -\tfrac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi.$$

De toppen zijn dus in $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ en $x = \frac{3\pi}{2}$. We hebben

$$f''(x) = 1 \cdot \cos x + x \cdot (-\sin x) = \cos x - x \sin x,$$

zodat

$f''(0) = 1 - 0 = 1$	minimum
$f''(\frac{\pi}{2}) = 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$	maximum
$f''(\frac{3\pi}{2}) = 0 - \frac{3\pi}{2} \cdot (-1) = \frac{3\pi}{2}$	minimum

Raaklijn met de quotiëntregel

Vind de raaklijn in $(-3, f(-3))$ aan $f(x) = \frac{x+3}{x^2+3x+4}$. We hebben

$$f'(x) = \frac{(x^2+3x+4)\cdot 1 - (x+3)(2x+3)}{(x^2+3x+4)^2}$$
$$= \frac{x^2+3x+4 - (2x^2+6x+3x+9)}{(x^2+3x+4)^2}$$
$$= \frac{-x^2-6x-5}{(x^2+3x+4)^2}.$$

Dit geeft

$$f'(-3) = \frac{-9+18-5}{(9-9+4)^2} = \frac{4}{4^2} = \frac{1}{4},$$

dus we zoeken een lijn van de vorm $y = \frac{1}{4}x + b$. Hij gaat door $(-3, f(-3))$, en $f(-3) = 0$, dus we lossen op

$$0 = \tfrac{1}{4} \cdot -3 + b \quad \Rightarrow \quad 0 = -\tfrac{3}{4} + b \quad \Rightarrow \quad \tfrac{3}{4} = b.$$

Opgaven en indeling

Opgaven

20.16 ac, 20.17 ac, 20.18 b, extra.

Antwoorden van de opgaven staan achterin, uitwerkingen van de extra opgaven op http://www.bliggy.net/cursusB.html.

Groepen

De indeling is op basis van je achternaam:

- A t/m D: zaal A1.06 (Gideon Jager)
- E t/m Kuhl: zaal A1.30 (Jeroen Eijkens)
- Kuhlhan t/m Seydel: zaal D1.114 (Sebastian Zur)
- Simsir t/m Z: zaal D1.116 (Thijs Benjamins)