Zomercursus Wiskunde B

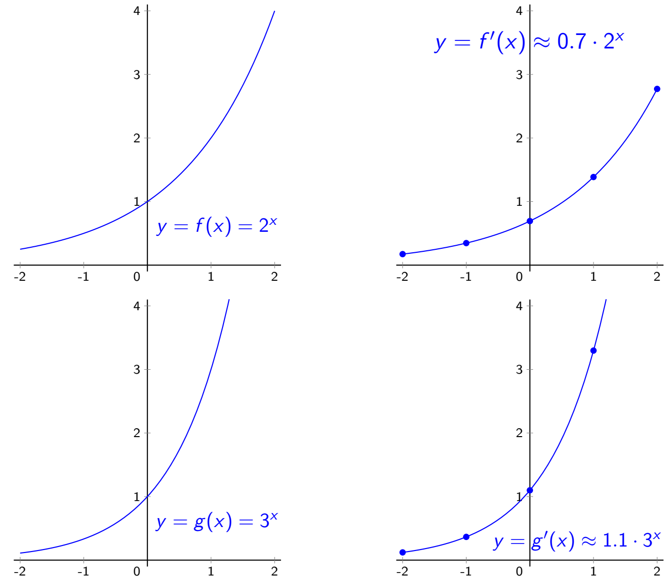
Week 2, les 3

Jolien Oomens
J.J.Oomens@uva.nl

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica
Universiteit van Amsterdam

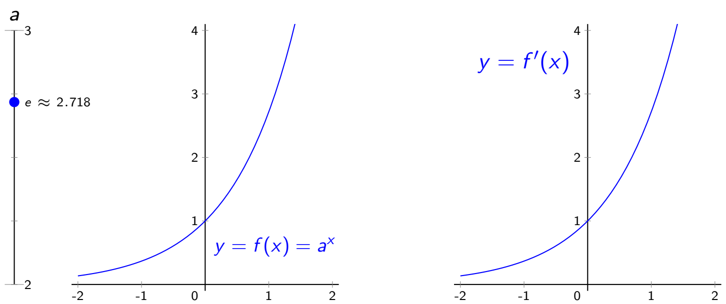
13 juli 2017

Afgeleides en exponentiële functies



Het grondtal e

Het getal $e \approx 2.718$ is zo dat de afgeleide van functie $f(x) = e^x$ gelijk is aan $f'(x) = e^x = f(x)$.



★[1] De constante e

De constante $e \approx 2.718$ komt vaak terug in de wiskunde. Analyse:

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots = e$$

Financiële wiskunde (samengestelde interest):

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e$$

Complexe analyse/Algebra/Software/Quantum computing/...:

$$e^{\pi i} = -1 \text{ waarbij } i^2 = -1$$

[1] Deze slide hoort niet bij de examenstof. Alle andere slides wel.

Regels voor differentiëren

We kunnen nu functies differentiëren die sommen, producten of quotiënten zijn van functies uit de tabel:

$$f(x) = x^2 - x\sin x, \quad g(x) = \frac{3\sin x - x}{\cos x}.$$

Maar hoe differentiëren we $h(x) = \sin(x^2)$?
Dit is een *samenstelling* van de twee functies $f(u) = \sin(u)$ en $u = x^2$. In dit geval geldt de *kettingregel* $[f(u)]' = f'(u)u'$.

$$\begin{aligned} f(u) &= \sin(u) & u &= x^2 \\ f'(u) &= \cos(u) & u' &= 2x \\ f'(x) &= \cos(u)2x = 2x\cos(x^2) \end{aligned}$$

$f(x)$	$f'(x)$
1	0
x	1
x^2	$2x$
x^n	nx^{n-1}
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
e^x	e^x

$$\begin{aligned} [f+g]' &= f' + g' \\ [cf]' &= cf' \\ [fg]' &= f'g + fg' \\ \left[\tfrac{t}{n}\right]' &= \tfrac{nt' - tn'}{n^2} \end{aligned}$$

Regels voor differentiëren

De kettingregel $[f(u)]' = f'(u)u'$ geeft afgeleides van samengestelde functies.
Bijvoorbeeld: $f(x) = (2x-1)^{100}$, $g(x) = e^{\sqrt{x}}$

$$\begin{aligned} f(u) &= u^{100} & u &= 2x - 1 \\ f'(u) &= 100u^{99} & u' &= 2 \\ f'(x) &= 100u^{99} \cdot 2 = 200u^{99} \\ &= 200(2x-1)^{99} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(u) &= e^u & u &= \sqrt{x} \\ g'(u) &= e^u & u' &= \tfrac{1}{2\sqrt{x}} \\ g'(x) &= e^u \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$f(x)$	$f'(x)$
1	0
x	1
x^2	$2x$
x^n	nx^{n-1}
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
e^x	e^x

$$\begin{aligned} [f+g]' &= f' + g' \\ [cf]' &= cf' \\ [fg]' &= f'g + fg' \\ \left[\tfrac{t}{n}\right]' &= \tfrac{nt' - tn'}{n^2} \end{aligned}$$

Afgeleides van exponentiële functies

We weten dat $[e^x]' = e^x$. Hoe vinden we de afgeleide van 2^x?

$$f(x) = 2^x = \left(e^{{}^e\log(2)}\right)^x = e^{{}^e\log(2)\cdot x}$$

We passen de kettingregel toe:

$$\begin{aligned} f(u) &= e^u & u &= {}^e\log(2)\cdot x \\ f'(u) &= e^u & u' &= {}^e\log(2) \end{aligned}$$

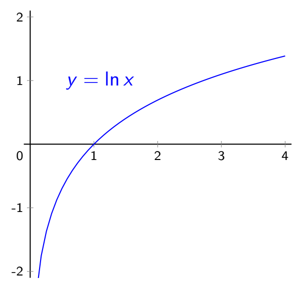
$$f'(x) = e^u \cdot {}^e\log(2) = {}^e\log(2)\cdot e^{{}^e\log(2)x} = {}^e\log(2)\cdot 2^x.$$

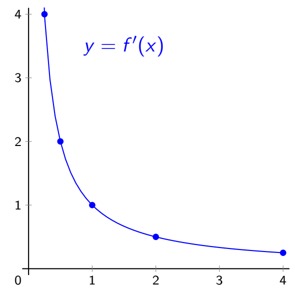
We schrijven ook wel $\ln(a) = {}^e\log(a)$ voor de logaritme met grondtal e. Deze wordt de *natuurlijke logaritme* genoemd.

Er geldt dus $[2^x]' = \ln(2)\cdot 2^x$, en algemener $[a^x]' = \ln(a)\cdot a^x$.

Afgeleides van logaritmische functies

Bekijk $f(x) = \ln x = {}^e\log x$. Er geldt $f'(x) = 1/x$.





Hiermee kunnen we ook andere logaritmes differentiëren:

$$\begin{aligned} g(x) &= {}^2\log x = \frac{{}^e\log x}{{}^e\log 2} = \frac{\ln x}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}\ln x \\ g'(x) &= \frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{\ln(2)x} \end{aligned}$$

Dus $[{}^2\log x]' = \frac{1}{\ln(2)x}$ en algemener $[{}^g\log x]' = \frac{1}{\ln(g)x}$.

Voorbeelden van afgeleides

Bekijk $f(x) = 2^{\sqrt{x}\ln x}$, $g(x) = xe^{x^3}$

$$f(u) = 2^u \qquad u = \sqrt{x}\ln x$$
$$f'(u) = \ln(2)\cdot 2^u \qquad u' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x + \sqrt{x}\frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \ln(2)\cdot 2^u\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x + \sqrt{x}\frac{1}{x}\right)$$
$$= \ln(2)\cdot 2^{\sqrt{x}\ln x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x + \sqrt{x}\frac{1}{x}\right).$$

$$g'(x) = e^{x^3} + x\left[e^{x^3}\right]' = e^{x^3} + 3x^3e^{x^3}$$

Dus we berekenen de afgeleide van $h(x) = e^{x^3}$:

$$h(u) = e^u \qquad u = x^3$$
$$h'(u) = e^u \qquad u' = 3x^2$$

$$h'(x) = e^u3x^2 = e^{x^3}3x^2$$

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^{n-1}
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
e^x	e^x
$\ln x$	$1/x$
a^x	$\ln(a)a^x$
${}^a\log x$	$\frac{1}{\ln(a)x}$

$$[f+g]' = f' + g'$$
$$[cf]' = cf'$$
$$[fg]' = f'g + fg'$$
$$\left[\frac{t}{n}\right]' = \frac{nt' - tn'}{n^2}$$
$$[f(u)]' = f'(u)u'$$

Voorbeelden van afgeleides

Bekijk $h(x) = \frac{1}{(3x^2-5)^6} = (3x^2-5)^{-6}$

$$h(u) = u^{-6} \qquad u = 3x^2 - 5$$
$$h'(u) = -6u^{-7} \qquad u' = 6x$$

$$h'(x) = -6u^{-7}\cdot 6x = -36x(3x^2-5)^{-7}$$
$$= \frac{-36x}{(3x^2-5)^7}$$

Ten slotte $f(x) = \sqrt{1+\ln x}$

$$f(u) = \sqrt{u} \qquad u = 1 + \ln x$$
$$f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \qquad u' = \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{2x\sqrt{1+\ln x}}$$

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^{n-1}
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
e^x	e^x
$\ln x$	$1/x$
a^x	$\ln(a)a^x$
${}^a\log x$	$\frac{1}{\ln(a)x}$

$$[f+g]' = f' + g'$$
$$[cf]' = cf'$$
$$[fg]' = f'g + fg'$$
$$\left[\frac{t}{n}\right]' = \frac{nt' - tn'}{n^2}$$
$$[f(u)]' = f'(u)u'$$

Opgaven en indeling

Opgaven

20.11, 20.12 be, 20.23, 20.24 ad, 20.26, 20.27 ace, 20.14, 20.15, extra.

Antwoorden van de opgaven staan achterin, uitwerkingen van de extra opgaven op http://www.bliggy.net/cursusB.html.

Groepen

De indeling is op basis van je achternaam:

- A t/m D: zaal A1.08 (Gideon Jager)
- E t/m Kuhl: zaal D1.115 (Jeroen Eijkens)
- Kuhlhan t/m Seydel: zaal D1.113 (Sebastian Zur)
- Simsir t/m Z: zaal D1.112 (Thijs Benjamins)